

BAC

محمد صابور

القواسم والموافقات

Mekk. Ayoub

100 تمرين تطبيقي



محمد صابور

القواسم و الموافقات

100تمرين تطبيقي
البرنامج الجديد

الشعب : - رياضيات
- تقني رياضي

الرَّجاء من الإخوة الدُّعاء للمُؤلِف والوالِد الكريم . رَحِمهُ الله .

رقم الإيداع القانوني : 2007 - 5189

ردمك: 8 - 2054 - 0 - 9947 - 978 : *ISBN*

دار المفيد للنشر و التوزيع - عين مليلة -

032 - 45 - 10 - 11

المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم .

أما بعد أخي القارئ أقدم إليك كتابا جديدا عنوانه **القواسم والموافقات** يضاف في سلسلة البكالوريا بين يديك .

يحتوي هذا الكتاب 100تمرين تطبيقي منها المحلولة حلا مفصلا ومنها المقترحة للحل.

إن كثرة التمارين الموجودة في هذا الكتيب تساعد طلبة شعبتي الرياضيات و التقني رياضي على تجاوز كل الصعوبات التي يتلقونها في محور القواسم والموافقات .

وأخيرا أتمنى لكل القراء من طلبتنا الأعزاء التوفيق كما أرجو من زملائي أساتذة الرياضيات أن يمدوني بملاحظتهم البناءة لتحسين محتوى هذا الكتيب .

كما أشكر شكرا جزيلا كل من ساهم من بعيد أو قريب في إنجاز هذا العمل المتواضع .

محمد صابور

الإهـــداء

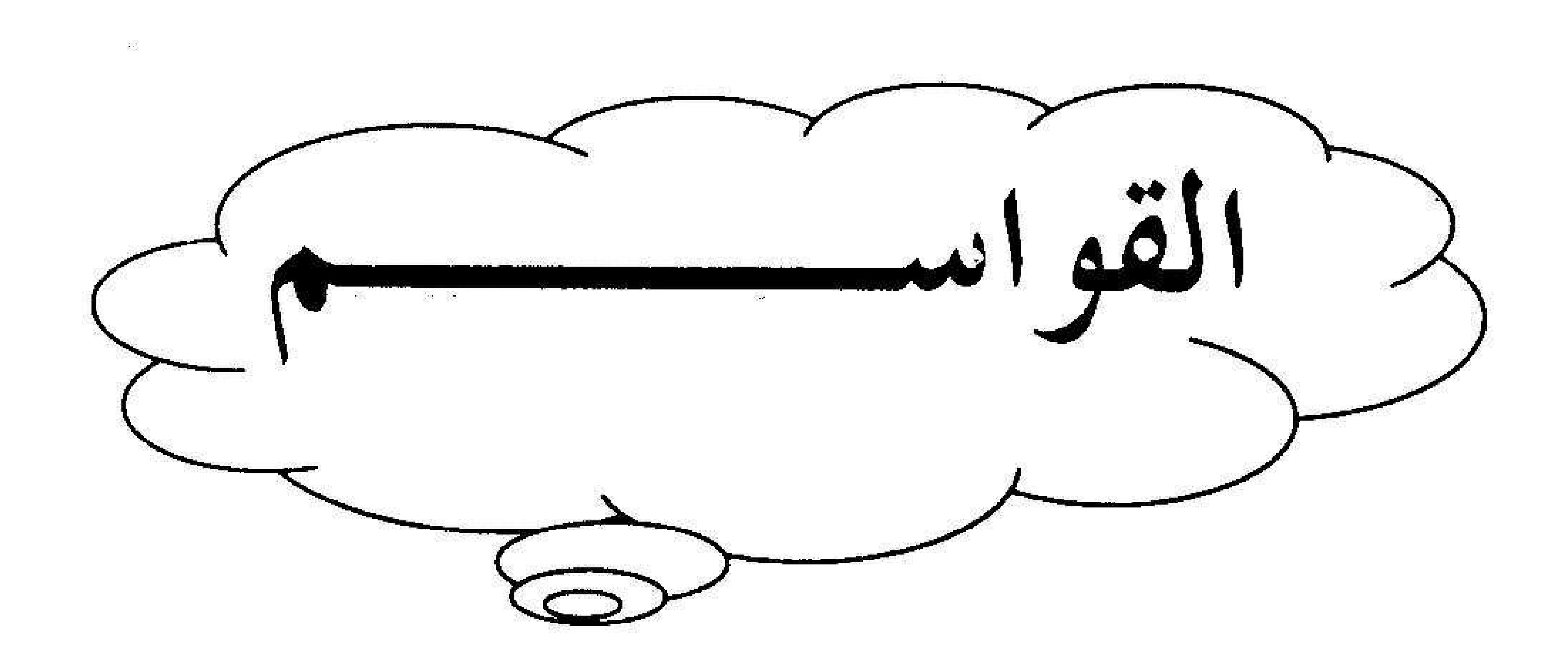
أهدي هذا العمل المتواضع إلى :

- **والدي الكريمين.**
- **رجال التعليم المخلصين في عملهم .**
- **أبنائي الطلبة متمنيا لهم التوفيق في البكالوريا .**



محمد صابور

الجزء الأول



أسالك اللهم علما نافعا



القواسم

1) القسمة في $\mathbb{Z}$

a و b عددان صحيحان $(a \neq 0)$. نقول بأن العدد a يقسم العدد b إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح k حيث $b = ka$. نقول أيضا أن العدد b مضاعف للعدد a.

***خواص**

a، b، c ثلاثة أعداد طبيعية غير معدومة . إذا كان a يقسم b و b يقسم c فإن a يقسم c.

- a و b عددان صحيحان حيث $a \neq 0$. إذا كان a يقسم b فإن a يقسم kb حيث $k \in \mathbb{Z}$.

- a، b، c ثلاثة أعداد صحيحة و $a \neq 0$. إذا كان a يقسم العددين b و c فإن a يقسم $mb + nc$ حيث $(m;n) \in \mathbb{Z}^2$.

2) قواسم عدد طبيعي

N عدد طبيعي محلل إلى جداء عوامل أولية كما يلي :

$N = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times ... \times p_n^{a_n}$ حيث $p_1 , p_2 ..., p_n$ أعداد أولية و $a_1, a_2 ..., a_n$ أعداد طبيعية فإن عدد قواسم N هو

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_n + 1)$$

<u>مثال:</u> $A = 2^2 \times 3^4$, $B = 2 \times 5^2 \times 7^3$. عدد قواسم A هو $(2+1)(4+1) = 15$ وعدد قواسم العدد B هو 24

3) القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين

تعريف: a و b عددين طبيعيين غير معدومين و D هي مجموعة القواسم المشتركة لهما . يسمى أكبر عنصر في المجموعة D بالقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

ونرمز له بـ $PGCD(a;b)$

* خواص

- مجموعة القواسم المشتركة للعددين الطبيعيين a و b هي مجموعة قواسم قاسمهما المشترك الأكبر .
- القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين غير معدومين a و b هو أخر باقي غير معدوم في سلسلة قسمات خوارزمية أقليدس .
- a و b عددان طبيعيان غير معدومين و k عدد طبيعي غير معدوم ، فإن $PGCD(ka;kb)=kPGCD(a;b)$.
- إذا كان a يقسم b فإن $PGCD(a;b)=a$.
- a و b عددين طبيعيين غير معدومين. إذا كان $PGCD(a;b)=1$ فالعددين a و b أوليان فيما بينهما .
- a و b عددين طبيعيين غير معدومين و d قاسمهما المشترك الأكبر ، فإن $a=da'$ و $b=db'$ حيث a' و b' هما أوليان فيما بينهما .

* القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية

للحصول على القاسم المشترك الأكبر لعدة أعداد طبيعية نحلل هذه الأعداد إلى جداء عوامل أولية ثم نحسب جداء العوامل المشتركة على أن نأخذ كل عامل مرة واحدة وبأصغر أس .

4) المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين

تعريف: a و b عددين طبيعيين غير معدومين و M هي مجموعة المضاعفات المشتركة لهما . يسمى أصغر عنصر من المجموعة M بـ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b

ونرمز له بـ $PPCM(a;b)$

* خواص

- a و b عددين طبيعيين غير معدومين ، فإن :

$$PPCM(ka;kb)=k\times PPCM(a;b) \qquad (k\in\mathbb{N}^*)$$

- a و b عددين طبيعيين غير معدومين فإن :

$$PPCM(a;b)=PPCM(b;a)$$

- إذا كان a يقسم b فإن : $PPCM(a;b)=b$
- إذا كان a و b أوليان فيما بينهما فإن $PPCM(a;b)=ab$

* المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية

للحصول على المضاعف المشترك الأصغر لعدة أعداد طبيعية نحلل هذه الأعداد إلى جداء عوامل أولية ثم نحسب جداء العوامل المشتركة وغير المشتركة على أن نأخذ كل عامل مرة واحدة وبأكبر أس .

5) العلاقة بين $PPCM$ و $PGCD$ لعددين طبيعيين

جداء عددين طبيعيين a و b هو مساوي لجداء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما الأصغر أي :

$$PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=a\times b$$

6) الأعداد الأولية

تعريف:

العدد الأولي هو عدد طبيعي يقبل القسمة على 1 وعلى نفسه

* خواص

- كل عدد طبيعي أكبر من 1 يقبل على الأقل قاسما أوليا .
- كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر من 1 يقبل قاسما أوليا a حيث $a \le \sqrt{n}$

* ملاحظة :

لمعرفة إذا كان عدد طبيعي n أكبر من 1 أولي أم لا ، نحسب $\sqrt{n}$

نقسم العدد n على العداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$ على الترتيب:

- إذا وجدنا أحد البواقي معدوما نتوقف ونقر بأن العدد n غير أولي.
- إذا كانت كل البواقي غير معدومة فيكون العدد n أولي .

7) مبرهنة بيزو

يكون العددان الصحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث $au+bv=1$

* خواص

- إذا كان d هو القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعيين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث $au+bv=d$.
- إذا كان a عدد أولي فإن a أولي مع كل الأعداد التي لايقسمها
- إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جداؤهما $b\times c$

8) مبرهنة غوص

a ، b ، c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .

إذا كان a يقسم الجداء $b\times c$ وكان a أولي مع b فإن a يقسم c

* خواص

- a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي .
إذا كان p يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو يقسم b.
- a ، b ، c أعداد طبيعية غير معدومة . إذا كان a يقبل القسمة على كل من العددين b و c وكان b و c أوليان فيما بينهما فإن a يقبل القسمة على الجداء $b\times c$.

9) التعداد

x عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1 و a عدد طبيعي .

إذا كان $a > x$ فإن a ينشر بطريقة وحيدة وفق العدد x :

$$a = r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + r_{n-2}x^{n-2} + \dots + r_2 x^2 + r_1 x + r_0$$

حيث $r_n \neq 0$ و $0 \le r_i < x$ مع $i \in [0;n]$

تمارين محلولة

تمرين 1

1) عين $PGCD(2800;8225)$ ثم استنتج مجموعة القواسم المشتركة للعددين 2800 و 8225 .

2) أوجد عدد حقيقي x إذا علمت أن باقي قسمة 2840 على x هو40 وباقي قسمة 8240 على x هو 15.

الحل

$$8225 = 2800\times 2 + 2625$$

$$2800 = 2625 + 175$$

$$2625 = 175\times 15 + 0$$

حسب خوارزمية أقليدس فإن : $PGCD(8225;2800) = 175$.

بما أن $175 = 5^2\times 7$ فإن عدد قواسم 175هو $6 = (1+1)(2+1)$

وهي : $\{1,5,7,25,35,175\}$.

2)العدد الطبيعي x الذي نبحث عنه يجب أن يكون أكبر من 40 لأن القاسم x يكون أكبر من الباقي .

لدينا : $2840 = kx + 40$ و $8240 = k'x + 15$ حيث $(k;k')\in \mathbb{N}^{*2}$ ومنه $2800 = kx$ و $8225 = k'x$ وهذا يعني أن x هو قاسم مشترك للعددين 2800 و 8225 و x أكبر من 40 ومن السؤال الأول نستنتج أن $x = 175$

تمرين 2

1) إذا كان باقي قسمة العدد الطبيعي a على b هو $(b-1)$ فما هو باقي قسمة العدد $(a+1)$ على b.

2) أوجد أصغر عدد طبيعي x الذي إذا قسم على 45 ،35، 46 تكون بواقي هذه القسمة 44 ،34، 45 على الترتيب .

الحل

1) لدينا $a = kb + (b-1)$ ومنه $a+1 = kb + b = (k+1)b$

وهذا يعني أن العدد $(a+1)$ هو مضاعف للعدد b ومنه باقي قسمة العدد $(a+1)$ على b هو 0 .

2) لدينا : $x = 46k + 45 = 35k' + 34 = 45k'' + 44$ ومنه $x+1 = 46(k+1) = 35(k'+1) = 45(k''+1)$ وهذا يعني أن $(x+1)$ هومضاعف مشترك للأعداد 46 ، 35 ، 45 وبما أن المطلوب هو أصغر عدد فيكون $(x+1)$ هو المضاعف المشترك الأصغر لهذه الأعداد .

$35 = 5\times 7$, $46 = 23\times 2$ ، $45 = 3^2\times 5$ ومنه

$$PPCM(46,45,35) = 2\times 23\times 5\times 7\times 3^2 = 14490$$

ويكون $x = 14489$.

تمرين 3

1) حاصل قسمة عدد طبيعي n على 37 هو q والباقي هو q^2 .
ماهي القيم الممكنة للعدد n ؟ 2) باقي قسمة العدد x على

35 هو 20 وباقي قسمته على 18 هو 12 .
أوجد x إذا علمت أن حاصل قسمة x على 18 هوضعف حاصل قسمته على 35.

الحـــل

1) لدينا : $\begin{cases} n=37q+q^2 \\ 0<q^2<37 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} n=37q+q^2 \\ 0<q<7 \end{cases}$ إذن :

$n=37q+q^2$ و $q\in\{1,2,3,4,5,6\}$ ومنه القيم المكنة للعدد n

هي : $\{38,78,120,164,210,258\}$.

2) $x=35k+20$ و $x=18k'+12$ و $k'=2k$ ومنه
$x=35k+20$ و $x=36k+12$ و $k'=2k$ ومنه
$36k+12=35k+20$ ومنه $k=8$
ويكون : $x=35k+20=35\times8+20=300$.

تمرين 4

عين الثنائيات $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ في الحالات الأتية :

1) $a^2-b^2=15$ ، 2) $a^2-4b^2=32$
3) $ab-4b-12=0$ و $b>a$

الحـــل

1) $a^2-b^2=15$
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)=15\times1=5\times3$ ومنه :

إما (*) $\begin{cases} a+b=15 \\ a-b=1 \end{cases}$ وإما (**) $\begin{cases} a+b=5 \\ a-b=3 \end{cases}$

الجملة (*) تقبل كحل الثنائية $(a;b)=(8;7)$ والجملة (**) تقبل كحل الثنائية $(a;b)=(4;1)$. الثنائيات $(8;7)$ و $(4;1)$ تحقق $a^2-b^2=15$.

2) $a^2-4b^2=32$
ومنه : $(a+2b)(a-2b)=32\times1=16\times2=8\times4$ ومنه

إما $\begin{cases} a+2b=32 \\ a-2b=1 \end{cases}$ إما $\begin{cases} a+2b=16 \\ a-2b=2 \end{cases}$ إما (*) $\begin{cases} a+2b=8 \\ a-2b=4 \end{cases}$

الجملتين الأولويتين ليس لهما حلول في $\mathbb{N}$ أما الجملة (*) تقبل كـل الثنائية $(a;b)=(6;1)$.

3) $ab-b-12=0$ ومنه : $b(a-1)=12$ ومنه

$\begin{cases} b=12 \\ a-1=1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} b=6 \\ a-1=2 \end{cases}$ أو $\begin{cases} b=4 \\ a-1=3 \end{cases}$ ومنه مجموعة الثنائيات $(a,b)\in\mathbb{N}^2$ المطلوبة هي : $(3;6),(2;12)$.

تمرين 5

1) برهن ان العددين $a=9n+4$ و $b=2n+1$ هما أوليان فيما بينهما . 2)) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين $a=9n+4$ و $c=2n-1$.

الحـــل

1) a و b أوليان فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=1$ (مبرهنة بيزو) .

$au+bv=1$ ومنه $u(9n+4)+v(2n+1)=1$ ومنه

$(9u+2v)n+4u+v=1$ ومنه $9u+2v=0$ و $4u+v=1$

ومنه $u=-2$ و $v=9$ ، بما أن $(-2)a+(+9)b=1$ حسب مبرهنة بيزو فالعددين a و b أوليان فيما بينهما .

2) ليكن d قاسم مشترك للعددين $a=9n+4$ و $c=2n-1$ ومنه d هو أيضا قاسم للعددين $2a$ و $9c$ ومنه d يقسم أيضا $2a-9c$ أي d يقسم 17 إذن $d=1$ أو $d=17$.

تمرين 6

n عدد طبيعي غير معدوم . c,b,a أعداد طبيعية حيث :

$c=2n$, $b=n+1$, $a=2n+1$.

1) برهن أن العددين a و b هما أوليان فيما بينهما ثم استنتج $PGCD(a;bc)$. 2) عين $PPCM(a;bc)$

الحـــل

1) نلاحظ ان : $(-1)(2n+1)+(+2)(n+1)=1$ حسب مبرهنة بيزو فالعددين $a=2n+1$ و $b=n+1$ هما أوليان فيما بينهما .

$a=2n+1$ و $c=2n$ عددان متتاليان فهما أوليان فيما بينهما .

بما أن a أولي مع b و a أولي مع c فيكون a أولي مع الجداء $b\,c$

ومنه $PGCD(a;bc)=1$.

2) نعلم أن المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعيين أوليان فيما بينهما يساوي جداؤهما ومنه

$PPCM(a;bc)=abc=2n(2n+1)(n+1)$.

تمرين 7

عين كل الثنائيات $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ حيث :

$PGCD(a;b)=5$ و $PPCM(a;b)=8160$

($a>5$ و $b>5$)

الحـــل

نضع $a=5a'$ و $b=5b'$ حيث : $PGCD(a';b')=1$

$PPCM(a;b)=PPCM(5a';5b')=5PPCM(a';b')$

بما أن $PGCD(a';b')=1$ فإن : $PPCM(a';b')=a'\times b'$

ومنه $PPCM(a;b)=5PPCM(a';b')=5a'b'=8160$

إذن $a'b'=1632$ و $PGCD(a';b')=1$. نلاحظ أن :

$(1632=2^5\times 51)$ ومنه $(a';b')\in\{(32;51),(51;32)\}$

ومنه $(a;b)\in\{(160;255),(255;160)\}$

تمرين 8

عين كل الثنائيات $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ والتي تحقق مايلي :

$$(1)\begin{cases} d=32 \\ m=288 \end{cases} \quad ، \quad (2)\begin{cases} a^2-b^2=405 \\ 3m=ab \end{cases}$$

حيث : $d=PGCD(a;b)$ و $m=PPCM(a;b)$

الحل

نضع : $a=da'$ و $b=db'$ حيث $PGCD(a';b')=1$

في الجملة (1) لدينا $d=32$

$$(1)\begin{cases} d=32 \\ m=288 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d=32 \\ 32a'b'=288 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} d=32 \\ a'b'=9 \end{cases}$$

ومنه $(a';b')\in\{(1;9),(9;1)\}$ ومنه

$(a=32$ و $b=32\times 9=288)$ أو $(a=288$ و $b=32)$

نعلم أن : $(2)\begin{cases} a^2-b^2=405 \\ 3m=ab \end{cases}$

$$PGCD(a;b)=d=\frac{a\times b}{PPCM(a;b)}=\frac{a\times b}{m}=3$$

ومنه بوضع $a=3a'$ و $b=3b'$ حيث $PGCD(a';b')=1$

وبتعويض في الجملة (2) وتبسيطها نجد :

$$\begin{cases} a'^2-b'^2=(a'+b')(a'-b')=45=45\times 1=15\times 3=9\times 5 \\ d=3 \quad , \quad PGCD(a';b')=1 \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} a'+b'=15 \\ a'-b'=3 \end{cases}(**) \quad , \quad \begin{cases} a'+b'=45 \\ a'-b'=1 \end{cases}(*)$$

$$\begin{cases} a'+b'=9 \\ a'-b'=5 \end{cases}(***)$$

حل الجملة $(*)$ هو : $a'=23$ و $b'=22$.

حل الجملة $(**)$ هو: $a'=9$ و $b'=6$ وهو حل مرفوض لأن $PGCD(a';b')\neq 1$.

حل الجملة $(***)$ هو : $a'=7$ و $b'=2$.

إذن الثنائيات $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ والتي تحقق الجملة (2) هي :

$$(a;b)\in\{(69;66),(21;6)\}$$

تمرين 9

عين كل الثنائيات $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ والتي تحقق مايلي :

$$(2)\begin{cases} m=210d \\ a-b=d \end{cases} \quad , \quad (1)\begin{cases} d+m=156 \\ m=d^2 \end{cases}$$

حيث : $PGCD(a;b)=d$ و $PPCM(a;b)=m$

الحل

$(1)\begin{cases} d+m=156 \\ m=d^2 \end{cases}$ ومنه $d^2+d-156=0$ ومنه $d=12$

بوضع $a=12a'$ و $b=12b'$ ونعلم أن : $m=da'b'=12a'b'$

وبتعويض في الجملة (1) وتبسيطها نجد :

$\begin{cases} a'b'+1=13 \\ a'b'=12 \end{cases}$, $PGCD(a';b')=1$

ومنه ($a'=3$ و $b'=4$) أو ($a'=4$ و $b'=3$)
أو ($a'=12$ و $b'=1$) أو ($a'=1$ و $b'=12$) ومنه الثنائيات المطلوبة هي :

$$(a;b)\in\{(36;48),(48;36),(144;12),(12;144)\}$$

$(2)\begin{cases} m=210d \\ a-b=d \end{cases}$ بوضع $a=da'$ و $b=db'$

و $m=da'b'$ حيث $PGCD(a';b')=1$ وبتعويض في الجملة (2)

نحصل $\begin{cases} a'b'=210 \\ a'-b'=1 \end{cases}$ لدينا $210=15\times14$ و $1=15-14$ إذن:

$a'=15$ و $b'=14$ ومنه $a=15d$ و $b=15d$ حيث $d\in\mathbb{N}^*$

تمرين 10

عين كل الثنائيات $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ والتي تحقق ما يلي :

$(1)\begin{cases} m+11d=203 \\ a>b \end{cases}$, $(2)\ m^2-3d^2=96$

حيث : $PGCD(a;b)=d$ و $PPCM(a;b)=m$

الحل

$(1)\begin{cases} m+11d=203 \\ a>b \end{cases}$ ومنه بوضع $a=da'$ و $b=db'$

نعلم أن : $PPCM(a;b)=da'b'$ و $PGCD(a';b')=1$

وبتعويض في الجملة (1) نحصل على $\begin{cases} d(a'b'+11)=203 \\ a'>b' \end{cases}$

إذن d يقسم 203 ومنه $d\in\{1,7,29,203\}$.

إذا كان $d=1$ فإن : $\begin{cases} a'b'=192 \\ a'>b' \end{cases}$ ومنه

($a'=a=192$ و $b'=b=1$) أو ($a'=a=64$ و $b'=b=3$)

إذا كان $d=7$ فإن : $\begin{cases} a'b'=18 \\ a'>b' \end{cases}$ ومنه

$(a';b')\in\{(18;1),(9;2)\}$ ومنه

$(a;b)\in\{(126;7),(63;14)\}$.

إذا كان $d=29$ أو $d=203$ فإن $a'b'<0$ (حالة مرفوضة)

$(2)\ m^2-3d^2=96$

لدينا $m=da'b'$ و $PGCD(a';b')=1$

ومنه $d^2(a'^2b'^2-3)=d^2((a'b')^2-3)=96$

ومنه d^2 يقسم 96 ولدينا : $96=2^5\times3=4^2\times6=2^2\times24$

الأعداد التي مربعاتها تقسم 96 هي : 2 و 4 ومنه $d=2$ أو $d=4$

إذا كان $d=2$ فإن $(a'b')^2=27$

(حالة مرفوضة لأن $a'b'\notin\mathbb{N}$).

إذا كان $d=4$ فإن : $(a'b')^2=9$ ومنه $a'b'=3$

ومنه :

$(a';b')\in\{(1;3),(3;1)\}$ ومنه $(a;b)\in\{(4;12),(12;4)\}$.

تمرين 11

1) أثبت أن العددين 108 و 547 أوليان فيما بينهما .

2) أوجد عددين صحيحيين p و k حيث : $108p+547k=1$

3)أوجد العدد الطبيعي n الذي قواسمه 10 و $100<n<200$

الحل

1) باستعمال خوارزمية أقليدس

$547=108\times5+7$ ، $108=7\times15+3$

$7=3\times2+1$ ومنه $PGCD(547;108)=1$

فالعددين 547 و 108هما أوليان فيما بينهما

2) $547=108\times5+7$ ومنه $7=547-108\times5$

$108=7\times15+3$ ومنه

$$3=108-7\times15=108-(547-5\times108)\times15=$$
$$=76\times108-15\times547$$

$7=3\times2+1$ ومنه

$$1=7-3\times2=(547-5\times108)-(76\times108-15\times547)\times2=$$
$$=31\times547-157\times108$$

إذن $108\times(-157)+547\times(+31)=1$

ومنه $p=-157$ و $k=+31$.

3) ألأعداد الطبيعية التي عدد قواسمها 10هي :

$2\times3^4=162$, $2^4\times3=48$, $2^9=512$

بمأ ن العدد الطبيعي n المطلوب يكون محصور بين 100 و 200
فيكون العدد n هو 162.

تمرين 12

1) برهن بأن العدد 503 هو عدد اولي .

2) عين الثنائيات $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ حيث : $a^2=b^2+503$

3) نعتبر في $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $(*)$ $13x-15y=1$.

باستعمال خوارزمية إقليدس عين حل خاص للمعادلة $(*)$ثم استنتج مجموعة حلولها .

الحل

1) يكون العدد الطبيعي n عدد أولي إذا كان لايقبل القسمة على كل الأعداد الأولية الأصغر من $\sqrt{n}$. العدد 503 لايقبل القسمة على الأعداد الأولية : $2,3,5,7,11,13,17,19$ التي هي أصغر من $\sqrt{503}$فهو عدد أولي .

2) $a^2=b^2+503$ ومنه $a^2-b^2=503$ ومنه

$(a+b)(a-b)=503\times1$ ومنه

$\begin{cases}a+b=503\\a-b=1\end{cases}$ ومنه $(a;b)=(252;251)$

3) $15=13\times1+2$ ومنه $2=15-13$

$13=2\times6+1$ ومنه

$$1=13-2\times6=13-(15-13)\times6=13\times7-6\times15$$

بما أن $13\times7-15\times6=1$ فالزوج $(7;6)$ يعتبر حل للمعادلة $(*)$.

لدينا $(*)$ $13x-15y=1$ و $13\times7-15\times6=1$ $(**)$

بطرح $(**)$ من $(*)$نجد : $13(x-7)-15(y-6)=0$

ومنه ⊕ $13(x-7)=15(y-6)$. 13يقسم $13(x-7)$

ومنه 13 يقسم $15(y-6)$ وبما أن 13 أولي مع 15 فإن

13يقسم $(y-6)$ ومنه $y-6=13k$ ومنه $y=13k+6$

وبالتعويض في المعادلة ⊕نجد : $x=15k+7$.

إذن حلول المعادلة (*) هي : $x=15k+7$ و $y=13k+6$

تمرين 13

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (1) $7x-5y=100$.

1)برهن أنه إذاكان $(x;y)$ حل للمعادلة (1) فإن x من مضاعفات 5.

2) أوجد حل خاص $(x_0;y_0)$ للمعادلة (1) ثم استنتج مجموع حلولها

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حيث $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ وحل للمعادلة (1) . ما هي القيم المكنة للعدد d ؟ .

4) حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة :
$$\begin{cases}7x-5y=100\\PGCD(x;y)=100\end{cases}$$

الحل

1) لدينا $7x-5y=100$ ومنه $7x=5(y+20)$ ومنه 5 تقسم $7x$ والعدد 5 أولي مع 7 ، حسب مبرهنة غوص فالعدد 5 يقسم x.

2) الثنائية : $(x_0;y_0)=(5;-13)$ هي حل خاص للمعادلة (1).

لدينا $7x-5y=100$ و $7\times5-5\times(-13)=100$ وبطرحهما نجد

$7(x-5)-5(y+13)=0$ ومنه

$7(x-5)=5(y+13)$ (*) ومنه 7 يقسم $7(x-5)$ ومنه 7 يقسم $5(y+13)$ وبما أن 7أولي مع 5 فإن 7 يقسم $(y+13)$

ومنه $y+13=7k$ ومنه $y=7k-13$.

وبتعويض في المعادلة (*) نجد $x=5k+5$. إذن حلول المعادلة (1) هي : $x=5k+5$ و $y=7k-13$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

3) بوضع $x=dx'$ و $y=dy'$ حيث $PGCD(x;y)=d$

وبتعويض في المعادلة (1)نجد : $d(7x'-5y')=100$

ومنه d يقسم 100 إذن $d\in\{1,2,4,5,10,20,25,50,100\}$

4)
$$\begin{cases}7x-5y=100\\PGCD(x;y)=100\end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases}7x'-5y'=1\\PGCD(x';y')=1\end{cases} (*)$$

نلاحظ أن الثنائية $(3;4)$ هي حل للجملة * ومنه

$7x'-5y'=1$ و $7\times3-5\times4=1$ وبطرحهما نجد

$7(x'-3)-5(y'-4)=0$ ومنه $7(x'-3)=5(y'-4)$ ⊕

7 يقسم $7(x'-3)$ ومنه 7 يقسم $5(y'-4)$ ، وبمأن 7 أولي مع 5

فإن 7 يقسم $y'-4$ ومنه $y'=7k+4$ وبتعويض في ⊕

نجد $x'=5k+3$. إذن حلول الجملة المطلوبة هي :

$x=100(5k+3)$ و $y=100(7k+4)$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

تمرين 14

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (*) $324x-245y=7$.

1) نفرض أن $(x;y)$ حل للمعادلة (*) أثبت أن x مضاعف للعدد7.

2) أوجد حل خاص للمعادلة (*) ثم استنتج مجموعة حلولها .

3) نضع $PGCD(x;y)=d$ ماهي القيم المكنة لـ d ؟ .

4) عين الثنائيات $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ وحل للمعادلة (*) بحيث يكون x أولي مع y .

الحـــل

1) (*) $324x-245y=7$ ومنه $324x=7(35y+1)$

ومنه7يقسم $324x$ و 7 أولي مع 324 ومنه 7يقسم x أي x من مضاعفات7 . 2) نعطي قيم لـ x من مضاعفات 7ونعين العدد الصحيح y وبالتالي نستنتج الحل الخاص $(x_0;y_0)=(28;37)$

لدينا $324x-245y=7$ و $324\times28-245\times7=7$

وبطرحهما نجد $324(x-28)-245(y-37)=0$ ومنه

$324(x-28)=245(y-37)\quad(E)$.

بما أن 324 تقسم $324(x-28)$ فإن 324 تقسم $245(y-37)$.

بماأن 324 أولي مع 245 فإن 324 تقسم $y-37$ ومنه

$y=324k+37$. وبالتعويض في (E) نجد $x=245k+28$

إذن حلول المعادلة (*) هي : $x=245k+28$ و $y=324k+37$

3) بوضع $x=dx'$ و $y=dy'$ وبتعويض في (*) نجد

$d(324x'-245y')=7$ ومنه d يقسم 7أي $d=1$ أو $d=7$.

4) لدينا x من مضاعفات 7ومنه إذاكان y من مضاعفات7يكون $d=7$

إذن x أولي مع y $(d=1)$ لما y ليس من مضاعفات 7.

$y=324k+37=7(46k+5)+2(k+1)$ ومنه يكون y ليس من مضاعفات 7 لما $k+1\neq 7p$ ومنه $k\neq 7p-1\ (p\in\mathbb{N})$

إذن الثنائيات $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ المطلوبة هي :

$x=245k+28$ و $y=324k+37$ مع $k\neq(7p-1)$.

تمرين 15

1) عين القاسم المشترك الأكبر للعددين 7125و 4125 ثم استنتج مجموعة قواسم المشتركة لهذين العددين .

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(1)\quad 7125x-4125y=\alpha$.

عين العدد الصحيح α لكي المعادلة (1) تقبل حلول في $\mathbb{Z}^2$.

3) نفرض أن $\alpha=3000$. أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1) .

ب) عين الثنائيات $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ وحل للمعادلة (1)

حيث : $-21\le x\le 34$.

4) حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة : $\begin{cases}19x-11y=8\\ PGCD(x;y)=8\end{cases}$

الحـل

1) $4125=3000\times1+1125$, $7125=4125\times1+3000$

$1125=750\times1+375$, $3000=1125\times2+750$

$750=375\times2+0$

حسب خوارزمية أقليدس فالقاسم المشترك ألأكبر للعددين 7125 و 4125 هو 375. وتكون مجموعة القواسم المشتركة للعددين 7125 و 4125 هي مجموعة قواسم 375 وهي :

1، 3 ، 5، 15، 25، 75، 125، 375 .

2) المعادلة (1) تقبل حلول في Z^2 إذاكان α من مضاعفات 375.

3) إذا كان $\alpha = 3000$ فالمعادلة (1) تصبح $(*)$ $19x-11y=8$.

أ) نلاحظ أن الثنائية $(1;1)$ هي حل خاص للمعادلة $(*)$ ومنه لدينا

$(*)$ $19x-11y=8$ و $(\bullet)$ $19\times1-11\times1=8$ وبطرح

$(\bullet)$ من المعادلة $(*)$ نجد $19(x-1)-11(y-1)=0$ ومنه

$\oplus$ $19(x-1)=11(y-1)$. 19 تقسم $19(x-1)$ ومنه

19 تقسم $11(y-1)$ وبما أن 19 أولي مع 11 فإن 19 تقسم

$(y-1)$ ومنه $y=19k+1$ وبتعويض في العادلة $\oplus$

نجد $x=11k+1$ حيث $k\in Z$.

ب) $-21\le x\le 34$ ومنه $-21\le 11k+1\le 34$ ومنه

$-2\le k\le 3$ و $k\in Z$ إذن $k\in\{-2,-1,0,1,2,3\}$

ومنه مجموعة الثنائيات $(x;y)$ المطلوبة هي :

$$\{(-21;-37),(-10;-18),(1;1),(12;20),(23;39),(34;58)\}$$

4) بوضع $x=8x'$ و $y=8y'$ وبتعويض في الجملة المعطاة

$$\begin{cases}19x-11y=8\\ PGCD(x;y)=8\end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases}19x'-11y'=1\\ PGCD(x';y')=1\end{cases} \quad (*)$$

نلاحظ أن $(x_0;y_0)=(-4;-7)$ هوحل خاص للجملة $(*)$.

لدينا $19x'-11y'=1$ و $19\times(-4)-11\times(-7)=1$ ومنه

بالطرح نجد $19(x'+4)-11(y'+7)=0$ ومنه

$19(x'+4)=11(y'+7)$ وبتطبيق الطريقة التي استعملت في

التمارين السابقة نجد $x'=11k-4$ و $y'=19k-7$ ومنه

$x=8(19k-4)$ و $y=8(19k-7)$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

تمرين 16

1) أثبت أن العددين 993 و 170 أوليان فيما بينهما .

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : (1) $993x-170y=143$

أ- عين الحل الخاص $(x_0;y_0)$ بحيث $x_0+y_0=6$

ب – حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (1).

3) أوجد أصغر عدد طبيعي a بحيث باقي قسمة العدد $(a-1)$ على

كل من العددين 1986 و 340 هو 14 و 300 على الترتيب .

الحـــل

1) $170=143\times1+27$, $993=170\times3+43$

$27=8\times3+3$, $143=27\times5+8$

$3=2\times1+1$, $8=3\times2+2$

بما أن $PGCD(993;170)=1$ فالعددين 993 و 170 هما اوليان

فيما بينهما .

2) $$\begin{cases}993x_0-170y_0=143\\ x_0+y_0=6\end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases}993x_0-170y_0=143\\ 170x_0+170y_0=6\end{cases}$$

بجمع معادلتي الجملة الثانية نجد $1163x_0=1163$ ومنه $x_0=1$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين للجملة الأولى نجد $y_0=5$.

ب) لدينا $\oplus$ $993x-170y=143$ و $*$ $993\times1-170\times5=143$ $993\times1-170\times5=143$

بطرح * من المعادلة ⊕ نجد $993(x-1)-170(y-5)=0$

ومنه $993(x-1)=170(y-5)$ وباستعمال الطريقة التي استعملت في التمارين السابقة نجد :

$x=170k+1$ و $y=993k+5$ حيث $k\in\mathbb{Z}$.

3) حسب المعطيات فإن : $a-1=1986m+14=340n+300$

ومنه بعد التبسيط نجد $993m-170n=143$ حيث $(m;n)\in\mathbb{N}^2$

وحسب السؤال السابق فإن حلول هذه المعادلة هي :

$m=170k+1$ و $n=993k+5$.

لدينا $a-1=340n+300$ ومنه

$a=340(993k+5)+300+1$ وتكون أصغر قيمة للعدد الطبيعي a من أجل $k=0$ وهي : $a=340\times5+301=2001$.

تمرين 17

$a=2n-1$, $b=9n+1$, $c=2n(5n-1)$ أعداد طبيعية حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1) برهن أن كل قاسم للعددين a و b هو قاسم للعدد 11.

2) عين العدد الطبيعي n لكي $PGCD(a;b)=11$.

3) برهن بان العددين a و c هما أوليان فيمابينهما .

الحل

1) ليكن d قاسم مشترك للعددين a و b ومنه d يقسم $9a$ و $2b$ و d يقسم أيضا $(2b-9a)$ أي يقسم 11 .

2) $9n+1=(2n-1)\times4+n+5$

$2n-1=2(n+5)-11$

حسب خوارزمية إقليدس فإن :

$PGCD(a;b)=PGCD(n+5;11)$.

يكون $PGCD(n+5;11)=11$ إذاكان $n+5=11k\ (k\in\mathbb{N})$

ومنه $n=11k-5$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

3) نعلم أن $PGCD(2n;2n-1)=1$ لا نهما عددين متتالين .

$1=(-5)(2n-1)+(+2)(5n-2)$ حسب مبرهنة بيزو

فالعددين $(2n-1)$ و $(5n-2)$ هما أوليان فيمابينهما .

العدد $a=(2n-1)$ أولي مع كل من $2n$ و $(5n-2)$ فهو أولي مع جداؤهما $c=2n(5n-2)$. إذن a و c أوليان فيمابينهما .

تمرين 18

$a=2n^2+5n+8$ و $b=n+1$ عددين طبيعيين ($n\in\mathbb{N}$) .

1) تحقق أن : $2n^2+5n+8=(2n+3)(n+1)+5$.

2) ناقش تبعا لقيم العدد الطبيعي n قيم $PGCD(a;b)$.

3) عين قيم العدد الطبيعي n لكي b يقسم a

4) عين العدد n الذي يحقق : $\begin{cases} PGCD(3n+8;n+1)=5 \\ PPCM(3n+8;n+1)=70 \end{cases}$

الحل

1) $(2n+3)(n+1)+5=2n^2+5n+8$.

2) لدينا $a=(2n+3)(n+1)+5=(2n+3)b+5$ وحسب خوارزمية أقليدس فإن $PGCD(a;b)=PGCD(n+1;5)$.

يكون $PGCD(a;b)=5$ إذاكان $n+1=5k$ ومنه $n=5k-1$.

يكون $PGCD(a;b)=1$ إذاكان $n\neq 5k+1$ حيث $k\in\mathbb{N}^*$.

3) b يقسم a يعني $\frac{a}{b}\in\mathbb{N}$ ومنه $\frac{2n^2+5n+8}{n+1}\in\mathbb{N}$ ومنه

$\left(2n+3+\frac{5}{n+1}\right)\in\mathbb{N}$ ومنه $\frac{5}{n+1}\in\mathbb{N}$ لأن $(2n+3)\in\mathbb{N}$

$\frac{5}{n+1}\in\mathbb{N}$ يعني $(n+1)$ يقسم 5 ومنه $n+1=1$ أو $n+1=5$

ومنه $n=0$ أو $n=4$.

4) نعلم أن $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=a\times b$ ومنه

$PGCD(3n+8;n+1)\times PPCM(3n+8;n+1)=$

$(3n+8)(n+1)=5\times 70$ ومنه $3n^2+11n-342=0$

ومنه $n=9\in\mathbb{N}$ أو $n=\frac{-76}{6}\notin\mathbb{N}$

إذن العددالطبيعي n الذي يحقق الجملة المعطاة في 4) هو $n=9$.

تمرين 19

a , b عددين طبيعين حيث :

$a=n^3+5n^2+7n+24$ و $b=n+3$ حيث $n\in\mathbb{N}$.

1) برهن أن $PGCD(a;b)=PGCD(b;21)=d$ واستنتج القيم الممكنة للعدد d.

2) عين قيم n حتى يكون $PGCD(a;b)=21$.

3) عين العدد الطبيعي لكي يكون الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للإختزال .

الحل

1) $n^3+5n^2+7n+24=(n+3)(n^2+2n+1)+21$

حسب خوارزمية إقليدس فإن $PGCD(a;b)=PGCD(b;21)$.

بما أن $PGCD(b;21)=d$ فيكون d من قواسم 21 ومنه القيم الممكنة للعدد d هي : $d\in\{1,3,7,21\}$.

2) نعلم إن $PGCD(a;b)=PGCD(n+3;21)$ ومنه يكون

$PGCD(a;b)=21$ لما $n+3=21k$ ومنه

$n=21k-3\ (k\in\mathbb{N}^*)$. 3) يكون الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للإختزال

إذا كان $PGCD(a;b)=1$ ومنه d لايأخذ القيم 3، 7 ، 21 إذن

مجموعة الأعداد الطبيعية n لكي يكون الكسر $\frac{a}{b}$ غير قابل للإختزال

هي : $n\in\mathbb{N}$ و $n\neq 21k-3$ و $n\neq 7k-3$ و $n\neq 3k-3$.

تمرين 20

a,b,c,d أعداد طبيعية غير معدومة وتشكل بهذا الترتيب متتالية هندسية أساسها q حيث $q>1$ و $PCCD(a;q)=1$.

عين a,b,c,d علما أن $d-b=10a^2$.

الحـــل

لدينا من المعطيات $10a^2 = d - b$. نعلم أن $b = aq$ و $d = aq^3$

ومنه $10a^2 = aq\left(q^2 - 1\right)$ ومنه $10a = q\left(q^2 - 1\right)$.

بما أن $PCCD(a;q) = 1$ حسب مبرهنة غوص فإن q يقسم 10

وتكون القيم الممكنة للعدد q هي : 2، 5 ، 10.

إذاكان $q = 2$ فإن $10a = 6$ ومنه $a = \frac{3}{5} \notin \mathbb{N}$.

إذاكان $q = 5$ فإن $10a = 120$ ومنه $a = 12$ و $b = aq$

$b = 12 \times 5 = 60$ و $c = bq = 60 \times 5 = 300$ و $d = 1500$.

إذاكان $q = 10$ فإن $10a = 990$ ومنه $a = 99$ و $b = aq$

$b = 99 \times 10 = 990$ و $c = bq = 9900$ و $d = cq = 99000$.

تمرين 21

لتكن الأعداد الطبيعية : $a = 4n + 1$, $b = 2n - 1$, $c = 3n + 1$

حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1- أ) أثبت أن العددين a و c أوليان فيما بينهما .

ب) استنتج أن لكل $n \in \mathbb{N}^*$: $PGCD\left(12n^2 + 3n; 3n + 1\right) = 1$

2) عين قيم n حتى يكون العدد $\frac{a}{b}$ عنصرا من $\mathbb{N}^*$.

3) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

4) عين قيمة العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases} PGCD(a;b) = 3 \\ PPCM(a;b) = 9 \end{cases}$

الحـــل

1) - أ) بما أن $(-3)(4n+1) + (+4)(3n+1) = 1$

حسب مبرهنة بيزو فالعددين a و c أوليان فيما بينهما .

ب) $12n^2 + 3n = 3n(4n+1)$ ونعلم أن

$PGCD(3n; 3n+1) = 1$ (عددين طبيعيين متتالين أوليان بينهما)

$PGCD(3n+1; 4n+1) = 1$ (سؤال سابق) .

$3n+1$ أولي مع كل من $3n$ و $4n+1$ فإن $3n+1$ أولي مع الجداء $3n(4n+1)$ ومنه $PGCD\left(12n^2 + 3n; 3n+1\right) = 1$.

2) $\frac{a}{b} \in \mathbb{N}^*$ ومنه $\frac{4n+1}{2n-1} \in \mathbb{N}^*$ ومنه $\left(2 + \frac{3}{2n-1}\right) \in \mathbb{N}^*$

ومنه $\frac{3}{2n-1} \in \mathbb{N}$ ومنه $(2n-1)$ يقسم 3 أي :

$(2n-1) = 1$ أو $(2n-1) = 3$ ومنه $n = 1$ أو $n = 2$.

3) $PGCD(a;b) = PGCD(2n-1; 3) = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

4) نعلم أن $PGCD(a;b) \times PPCM(a;b) = a \times b$ ومنه

$(4n+1)(2n-1) = 9 \times 3$ ومنه $8n^2 - 2n - 28 = 0$

ومنه $n = 2$ (مقبولة) أو $n = -\frac{7}{4} \notin \mathbb{N}$ (مرفوضة) .

تمرين 22

n عدد طبيعي . 1) عين العدد الطبيعي n حتى يكون الكسر $\frac{2n^2+3n+3}{n+2}$ عددا طبيعيا . 2) عين قيم العدد الطبيعي n من أجلها يكون الكسر $\frac{2n^2+3n+3}{n+2}$ غير قابل للإختزال.

3) ماهي القيم الممكنة للعدد n حتى يكون n^2 يقسم 468؟

4) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $2x^3+x^2-468=0$.

الحل

1) نعلم أن $\frac{2n^2+3n+3}{n+2}=2n-1+\frac{5}{n+2}$ ومنه يكون الكسر $\frac{2n^2+3n+3}{n+2}$ عددا طبيعيا إذا كان $\frac{5}{n+2}\in\mathbb{N}$ ومنه $(n+2)$ يقسم 5 ومنه $n+2=1$ أو $n+2=5$ ومنه $n=3$.

2) يكون الكسر $\frac{2n^2+3n+3}{n+2}$ غير قابل للإختزال إذا كان $PGCD(2n^2+3n+3;n+2)=1$ ونعلم أن : $PGCD(2n^2+3n+3;n+2)=PGCD(n+2;5)$ ويكون $PGCD(n+2;5)=1$ إذا كان $n+2$ ليس من مضاعفات 5 أي $n+2\neq 5k$ ومنه $n\neq 5k-2\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$.

3) $468=2^2\times3^2\times13$ ومنه قيم العدد الطبيعي n حتى يكون n^2

يقسم 468 هي 2، 3 ، 6 .

4) $2x^3+x^2-468=0$ ومنه $x^2(2x+1)=468$ ومنه x^2 يقسم 468 وحسب السؤال السابق فإن $x=6$ يحقق المعادلة المعطاة .

تمرين23

1) a عدد طبيعي . أكتب العدد $(a+1)^3$ في النظام ذي الأساس a .

2) ليكن x عدد طبيعي يكتب في النظام العشري 2735.

أ- أكتب x في النظام ذي الأساس 7 .

ب- أكتب x في النظام ذي الأساس 12 .

الحل

1) نعلم أن : $(a+1)^3=a^3+3a^2+3a+1$.

- إذا كان $a>3$ فإن :

$$(a+1)^3=\overline{1331}$$

- إذاكان $a=3$ فإن :

$$(a+1)^3=64=2\times3^3+3^2+1=\overline{2101}$$

- إذا كان $a=2$ فإن :

$$(a+1)^3=27=2^4+2^3+2+1=\overline{11011}$$

2)

$2735 = 390\times7+\boxed{5}$

$390 = 55\times7+\boxed{5}$

$55 = 7\times7+\boxed{6}$

$7 = 1\times7+\boxed{0}$

$1 = 0\times7+\boxed{1}$

$2735 = 227\times12+\boxed{11}$

$227 = 18\times12+\boxed{11}$

$18 = 1\times12+\boxed{6}$

$1 = 0\times12+\boxed{1}$

العدد 2735 يكتب في النظام ذي الأساس 7 : $\overline{10655}$

العدد 2735 يكتب في النظام ذي الأساس12 : $\overline{16\beta\beta}$

تمرين24

1) x عدد طبيعي يكتب $\overline{543}$ في النظام ذي الأساس 7.
أكتب x في النظام العشري .

2) y عدد طبيعي يكتب $\overline{3662}$ في النظام ذي الأساس 7.
أكتب y في النظام ذي الأساس 12 .

الحل

العدد x يكتب في النظام العشري :

$$x = 5\times7^2+4\times7+3=276$$

2) العدد y يكتب في النظام العشري:

$$y = 3\times7^3+6\times7^2+6\times7+2=1367$$

$1367 = 113\times12+\boxed{11}$. العدد y يكتب $\overline{95\beta}$ في النظام ذي الأساس 12

$113 = 9\times12+\boxed{5}$

$9 = 0\times12+\boxed{9}$

تمرين25

في نظام عد أساسه x مجهول يكتب عددان $\overline{230}$ و $\overline{3421}$ بينما يكتب مجموعهما $\overline{4201}$. عين الأساس x .

الحل

حسب تعريف نشر عدد طبيعي وفق أساس معين ، يجب أن يكون الأساس x أكبر تماما من العدد4 . الأعداد $\overline{230}$ ، $\overline{3421}$ ، $\overline{4201}$ المكتوبة في النظام ذي الأساس x يكون نشرها :

$\overline{230}=2x^2+3x+0$ ، $\overline{3421}=3x^3+4x^2+2x+1$

$\overline{4201}=4x^3+2x^2+0x+1$. حسب المعطيات لدينا في النظام ذي الأساس x $\overline{3421}+\overline{230}=\overline{4201}$ ومنه

$(3x^3+4x^2+2x+1)+(2x^2+3x)=4x^3+2x^2+1$ ومنه

$x^3-4x^2-5x=0$ ومنه $x(x^2-4x-5)=0$ ومنه :

$x=0$ (مرفوض) أو $x=5$ (مقبول) أو $x=1$ (مرفوض) .
إذن الأساس x المطلوب هو5 .

تمرين26

x و y عددين طبيعيين غير معدومين . 1) أوجد الأعداد التي تكتب xy في النظام العشري و $\overline{yx}$ في النظام ذي الأساس 7 .

الحل

1) بما أن $\overline{yx}$ هي كتابة الأعداد في النظام 7، فيكون حتما $x<7$ و $y<7$. الأعداد التي تكتب xy في النظام العشري يكون نشرها :

$10x+y$ والأعداد التي تكتب $\overline{yx}$ في النظام ذي الأساس 7 يكون نشرها : $7y+x$ وحسب المعطيات لدينا $10x+y=7y+x$ ومنه $3x=2y$ و $(x<7$ و $y<7)$ ومنه $(x=2,\ y=3)$ أو $(x=4\ ,y=6)$ ، إذن ألأعداد المطلوبة هي : 23 ، 46 .

تمرين27

ليكن n عددا طبيعيا يكتب $\overline{342u}$ في النظام ذو الأساس a .

- حدد u لكي يكون العدد n قابلا القسمة

1) على 5 من أجل $a=6$.

2) على 12 من أجل $a=17$.

الحل

1) من أجل $a=6$ فإن :

$$n=3\times6^3+4\times6^2+2\times6+u=804+u$$

ومنه : $n\equiv804+u\equiv4+u[5]$ ونعلم انه في النظام ذو الأساس 6 كل أرقام العدد تكون أقل من 6 ومنه يكون n قابلا القسمة على 5

إذا كان : $\begin{cases}4+u\equiv0[5]\\0\le u\le5\end{cases}$ إذن $\boxed{u=1}$

2) من أجل $a=17$ فإن :

$$n=3\times17^3+4\times17^2+2\times17+u$$

ونعلم ان : $17\equiv5[12]$ ، $17^2\equiv1[12]$ ، $17^3\equiv5[12]$

ومنه : $n\equiv3\times5+4\times1+2\times5+u[12]$

أي : $n\equiv5+u[12]$ يكون العدد n قابلا القسمة على 12

لما : $\begin{cases}5+u\equiv0[12]\\0\le u\le16\end{cases}$ إذن $\boxed{u=7}$

تمرين28

ليكن n عددا طبيعيا يكتب $\overline{1x5y4}$ في النظام ذو الأساس 6 .

- أوجد جميع الأزواج $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ بحيث:

1) n يقبل القسمة على 35 .

2) n يقبل القسمة على 70 .

الحل

1) لدينا : $n=6^4+6^3x+5\times6^2+6y+4$

ونعلم ان : $6^2\equiv1[35]$ ، $6^3\equiv6[35]$ ، $6^4\equiv1[35]$

ومنه : $n\equiv6x+6y+10[35]$ حيث: $0\le x\le5$ و $0\le y\le5$

n يقبل القسمة على 35 يعني أن : $n\equiv0[35]$ ومنه :

$6x+6y+10\equiv0[35]$ ومنه : $6x+6y\equiv-10[35]$ ومنه :

$3x+3y\equiv-5[35]$ ومنه : $3(x+y)\equiv30[35]$ ومنه :

$x+y\equiv10[35]$ (لأن 3 أولي مع 35) ومنه :

$\begin{cases}x+y=10\\0\le x\le5\\0\le y\le5\end{cases}$ ومنه الزوج الوحيدالذي يحقق هو $x=5$ و $y=5$

و يكون العدد n في النظام العشري :

$n = 6^4 + 6^3\times5+5\times6^2+6\times5+4 = \boxed{2590}$

2) العدد 2590 عدد زوجي فهو يقبل القسمة على 2.
بما أن 2590 يقبل القسمة على 35 و يقبل القسمة على 2
و العددان أوليان فيما بينهما فإن 2590 يقبل القسمة على جدائهما
$35\times2=70$ (خواص نظرية غوص)
$.2590 = 70\times37$

تمرين29

1) عين عددين طبيعيين x و y بحيث يكون العدد $n = \overline{12x92y}$ المكتوب في النظام العشري قابلا القسمة على 9 و على 11.
2)أكتب العدد n في النظام ذو الأساس 9 .

الحل

1) لدينا $0\le x\le 9$ و $0\le y\le 9$
و $n = 1\times10^5+2\times10^4+x\times10^3+9\times10^2+2\times10+y$
ومنه: $n\equiv -1+2-x+9-2+y\,[11]$
و $n\equiv 1+2+x+9+2+y\,[9]$
أي : $n\equiv -x+y+8[11]$ و $n\equiv x+y+5[9]$.
$n\equiv0[11]$ و $n\equiv 0[9]$ معناه :
$-x+y+8\equiv0[11]$ و $x+y+5\equiv0[9]$
ومنه : $y-x\equiv-8\equiv3[11]$ و $y+x\equiv-5\equiv4[11]$.
لدينا : $y-x\equiv3[11]$ ومنه :
$(x;y)\in\{(4;1),(5;2),(6;3),(7;4),(8;5),(9;6)\}$

و بما أن $y+x\equiv4[11]$ فإن : $(x;y)=(8;5)$.
إذن العدد n هو : 125928 .
2) العدد n يكتب $\overline{211660}$ في النظام ذو الأساس 9 .

تمرين30

عين العدد n المؤلف من ثلاثة أرقام و الذي يكتب $\overline{xyz}$ في النظام 7 و $\overline{zyx}$ في النظام 11 .

الحل

لدينا $0\le x\le6$ و $0\le y\le 6$ و $0\le z\le6$
و $n = x\times7^2+y\times7+z$ ، $n = z\times11^2+y\times11+x$
ومنه: $49x+7y+z=121z+11y+x$
ومنه: $48x-4y-120z=0$ ومنه: $12x-y-30z=0$
ومنه : $y=12x-30z$.
و بما أن $0\le y\le6$ فإن : $0\le 12x-30z\le6$
أي $0\le 2x-5z\le1$ والحل الوحيد الذي يحقق هذه المتراجحة هو :
$x=3$ و $z=1$ و $y=12x-30z=6$
فيكون العدد n هو : $n=3\times49+6\times7+1=\boxed{190}$.

تمارين مقترحة للحل

تمرين1

عين الأزواج $(a;b)\in \mathbb{N}^2$ والتي تحقق مايلي :

$$(1)\begin{cases} a+b=96 \\ PGCD(a;b)=12 \end{cases} \quad , \quad (2)\begin{cases} PGCD(a;b)=5 \\ PPCM(a;b)=30 \end{cases}$$

تمرين2

a,b عددين طبيعيين حيث :

$PGCD(a;b)=d$ و $PPCM(a;b)=m$.

عين كل الثنائيات $(a;b)\in \mathbb{N}^2$ في كل حالة من الحالات الآتية :

$$(1)\begin{cases} m-d=108 \\ 10<d<15 \end{cases} , (2)\begin{cases} a-b=d \\ m=400 \end{cases} , (3)\begin{cases} a^2-b^2=200 \\ 5m=ab \end{cases}$$

تمرين3

1) أوجد الأعداد الطبيعية التي مربعها يقسم 252.

2) عين كل الثنائيات $(a;b)\in \mathbb{N}^2$ التي تحقق $d^2-m^2=252$ حيث $PGCD(a;b)=d$ و $PPCM(a;b)=m$.

تمرين4

β,α,b,a أعداد طبيعية .

نفرض أن $a=9\alpha+4\beta$ و $b=2\alpha+\beta$.

1) برهن أن $PGCD(a;b)=PGCD(\alpha;\beta)$

2) برهن أن العددين $(9\alpha+4)$ و $(2\alpha+1)$ أوليان فيما بينهما ثم استنتج أن $PGCD(18\alpha^2+19\alpha+5;\,9\alpha+4)=1$.

3) ناقش تبعا لقيم α قيم القاسم المشترك الأكبرللعددين $(9\alpha+4)$ و $(2\alpha-1)$.

تمرين5

1) برهن أنه إذا كان x و y عددين طبيعيين أوليان فإن $(3x+5y)$ و $(x+2y)$ أوليان فيما بينهما .

2) حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة

$$\begin{cases} (3a+5b)(a+2b)=672 \\ ab=2m \quad , \quad m=PPCM(a;b) \end{cases}$$

تمرين6

1) عين قواسم العدد 5929.

2) عين كل الثنائيات $(a;b)\in \mathbb{N}^2$ بحيث يكون $PGCD(a;b)$ و $PPCM(a;b)$ هما جذري المعادلة $x^2-91x+588=0$

تمرين7

n عدد طبيعي غير معدوم ، نضع $a=5n+4$ و $b=2n-1$.

1) عين تبعا لقيم n القاسم المشترك الأكبر للعددين a و b .

2) عين قيمة العدد الطبيعي n إذا كان :

$PGCD(a;b)=13$ و $PPCM(a;b)=507$.

تمرين8

1) عين كل الأعداد الصحيحة n بحيث $(n+2)$ يقسم $(2n-1)$.

2) برهن أن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فالعددين $(n+2)$ و n^2+3n-1 أوليان فيما بينهما .

3)عين العدد الصحيح n لكي : $\frac{(2n^2+3n-1)(2n-1)}{n+2} \in \mathbb{Z}$

تمرين9

n عدد طبيعي . نضع $a=2n+3$ و $b=n+5$.

1) ماهي القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$ ؟

2) عين الأعداد الطبيعية n والتي تحقق $PGCD(a;b)=7$.

3) عين مجموعة الأعداد الصحيحة n لكي $\frac{2n+3}{n+5} \in \mathbb{Z}$.

تمرين10

1) عين مجموعة الأزواج $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ بحيث $2x-5y=4$ (*) .

2) برهن أن إذا كان $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ وحل للمعادلة (*) فإن x و $(y+1)$ أوليان فيما بينهما .

3) عين مجموعة الأزواج $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ والتي تحقق مايلي :

$$\begin{cases} 2x-5y=4 \\ PGCD(x;y)=4 \end{cases}$$

تمرين11

نعتبر في $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $13a-35b=420$ (*) .

1) برهن أن إذا كان $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ حل للمعادلة (*) فإن a يقبل القسمة على 35 .

2) استنتج حلول المعادلة (*)

3) عين الأزواج $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ وحل للمعادلة (*) والتي تحقق : $1 \le b \le 27$.

تمرين12

نعتبر في $\mathbb{N}^2$ المعادلة : $35x-29y=7$ (1) .

1) باستعمال خوارزمية إقليدس عين حل خاص للمعادلة (1) ثم حل هذه المعادلة .

2) نفرض أن $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ وحل للمعادلة (1) و $PGCD(x;y)=d$ ، ماهي القيم الممكنة لـ d ؟

3) عين الثنائيات $(x;y)$ التي تحقق (1) و $PGCD(x;y)=7$.

تمرين13

1) عين مجموعة الأزواج $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ حلول المعادلة : $5x-4y=2$ (*) .

2)نعتبر الأزواج $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ وحلول المعادلة (*)، ماهي القيم الممكنة لـ $PGCD(a;b)$ ؟ .

3) برهن أنه يوجد زوج وحيد $(a;b)$ حل للمعادلة (*) ويحقق : $PGCD(a;b)=2$ و $PPCM(a;b)=60$.

تمرين14

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $11x+32y=1984$ (*)

1) أثبت أنه من أجل كل زوج $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ وحل للمعادلة (*) فإن x يقبل القسمة على 32 .

2) استنتج مجموعة حلول المعادلة (*)

3) عين الأزواج $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ التي هي حلول المعادلة $(*)$ والتي تحقق : $-37<y<3$

تمرين15

لتكن المعادلة (E) $11x+3y=65$ حيث $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$.

1) عين الثنائية $(x_0;y_0)\in\mathbb{Z}^2$ التي هي حل للمعادلة (E) وتحقق $2x_0{}^2-3y_0=11$. 2) استنتج حلول المعادلة (E).

3) عين كل الثنائيات $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ حل للمعادلة (E) حيث $x>-5$ و $y>-5$.

تمرين16

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $8x+9y=214\ (*)$.

1) باستعمال خوارزمية أقليدس عين حل خاص $(x_0;y_0)\in\mathbb{Z}^2$.

2) حل المعادلة $(*)$. 3) نفرض أن $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ وحل للمعادلة $(*)$ و $PGCD(x;y)=d$.

أ) ماهي القيم الممكنة لـ d ؟.

ب) حل في $\mathbb{N}^2$ الجملة $\begin{cases}8x+9y=214\\ PGCD(x;y)=2\end{cases}$

4) عين الثنائيات $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ وحل للمعادلة $(*)$ وتحقق $xy\geq 0$.

تمرين17

عين كل الأزواج $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ والتي تحقق :

$\begin{cases}a^2-b^2=150\\ 5m=ab\end{cases}$, $\begin{cases}m^2-5d^2=1980\\ a>b\end{cases}$, $\begin{cases}m^2+d^2=580\\ ab=96\end{cases}$

حيث : $PGCD(a;b)=d$ و $PPCM(a;b)=m$.

تمرين18

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_2=15$.

نضع : $m=PPCM(u_1;u_3)$ و $d=PGCD(u_1;u_3)$.

1) أحسب u_1 , u_3 علما أن $m+d=42$.

2) أحسب $S_n=u_1+u_2+...+u_n$.

3- أ) تحقق أن $2S_n$ من مضاعفات 3.

ب) عين العدد الطبيعي n لكي $2S_n$ يقبل القسمة على 15.

تمرين19

u_0 , q عددين طبيعيين غير معدومين .

(u_n) متتالية هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q.

1) عين q و u_0 علما أن q أولي مع u_0 و $3u_0{}^2=u_3-u_1$.

2) نفرض أن $u_0=8$ و $q=3$. نضع $S_n=u_0+u_1+...+u_{n-1}$ و $P_n=u_0\times u_1\times...\times u_{n-1}$ ، أحسب S_n و P_n بدلالة n.

3- أ) أدرس حسب قيم n بواقي قسمة العدد 3^n على 13

ب) عين العدد الطبيعي n الذي من أجله يكون S_n مضاعف للعدد 13 .

تمرين20

1) برهن بأن العددين 108 و109 هما أوليان فيما بينهما .

2) برهن بأن العدد 109 هو عدد أولي .

3- أ) عين الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم 108.

ب) عين كل الثنائيات $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ وتحقق $a^2 - b^2 = 108$.

تمرين21

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(*)$ $19x + 13y = 1000$.

1) عين حل خاص $(x_0;y_0) \in \mathbb{Z}^2$ حيث $3x_0^2 - y_0 + 62 = 0$ ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(*)$. 2) عين كل الثنائيات $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ والتي هي حل للمعادلة $(*)$ وتحقق $xy > 0$.

3) في نادي الثانوية مجموعة من التلاميذ والتلميذات صرفوا $1000\,DA$ ، فإذا صرف كل تلميذ $19DA$ وكل تلميذة $13DA$ فما هو عدد التلاميذ وعدد التلميذات ؟ .

تمرين22

نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) $8x - 165y = 0$.

1) عين كل الثنائيات $(x;y) \in \mathbb{Z}^2$ التي هي حلول المعادلة (E) علما أن الثنائية $(124;6)$ هي حل خاص للمعادلة (E).

2) n عدد طبيعي باقي قسمته على 15 و على 22 هو 10 وباقي قسمته على 8 و على 16 هو 6 . ماهي أصغر قيمة العدد n ؟ .

تمرين23

1) أحسب القاسم المشترك للأعداد 2490 ، 32785 ، 2905 .

2) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(*)$ $7x + 6y = 79$

(ملاحظة $72 + 7 = 79$) .

3) إشترى نادي كرة اليد ملابس رياضية للاعبيه ، إذاعلمت أن ثمن

بذلة اللاعب هو $2905\,DA$ وثمن بذلة اللاعبة $2490\,DA$ وعلما أن النادي دفع في المجموع $32785\,DA$. ماهو عدداللاعبين واللاعبات ؟

تمرين24

عين الثنائيات $(a;b) \in \mathbb{N}^2$ في الحالات الأتية :

$$(1)\begin{cases} a^2 - b^2 = 20 \\ 2m = 24 \end{cases} , (2)\begin{cases} a + b = 20 \\ m = 6d \end{cases} , (3)\begin{cases} a + b = 42 \\ ab = 6m \end{cases}$$

حيث $PGCD(a;b) = d$ و $PPCM(a;b) = m$

تمرين25

نعتبر الأعداد الطبيعية $c = n + 2$ ، $b = 2n - 1$ ، $a = 3n + 2$

حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1) بين أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

2) تحقق أن $a = 3c - 4$ واستنتج القيم الممكنة لـ $PGCD(a;c)$

3) عين قيم العدد الطبيعي n لكي $\frac{a}{c} \in \mathbb{N}$.

4) عين قيم n لكي الكسر $\frac{b}{c}$ يكون غير قابل للإختزال .

تمرين26

لتكن (u_n) متتالية حسابية متزايدة حيث $u_2 > 4$.

ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين u_2 و u_5 وليكن m المضاعف المشترك الأصغر لهما .

1) عين العددين الطبيعيين u_2 و u_5 علما أن $d = 2$ و $m = 56$.

2- أ) استنتج الأساس والحد الأول لهذه المتتالية .

ب) أكتب عبارة u_n بدلالة n.

ج) عين قيم n حتى يكون u_n يقبل القسمة على 7.

تمرين27

1) يكتب العدد x في النظام العشري 17853 . اكتب العدد x في النظام ذي الأساس 9 وفي النظام ذي الأساس 12 .

2) y عدد طبيعي يكتب في النظام ذي الأساس 7 كما يلي $\overline{3452}$.
أكتب العدد y في النظام العشري ثم في النظام ذي الأساس 8 .

تمرين28

أوجد في كل حالة من الحالات الآتية أساس التعداد الذي يكون فيه :

1) $\overline{15}\times\overline{23}=\overline{411}$

2) $\overline{22}\times\overline{32}=\overline{541}$

3) $\overline{77}+\overline{63}=\overline{162}$

تمرين29

n عدد طبيعي يكتب $\overline{4x3}$ في النظام ذي الأساس 5 و $\overline{x30}$ في النظام ذي الأساس 9 . أوجد x ثم أكتب n في النظام العشري .

تمرين30

n عدد طبيعي يكتب $\overline{xyzzx}$ في النظام ذي الأساس 5 و $\overline{yyxy}$ في النظام ذي الأساس 8 . أكتب n في النظام العشري .

الجزء الثاني



Scanned by: Mekkaoui Ayoub
Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

الموافقات

الموافقات في $\mathbb{Z}$:

تعريف : a و b عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم .
نقول أن العددين a و b متوافقان بترديد n إذا كان لهما نفس الباقي في القسمة على n .
و نكتب : $a \equiv b\,[n]$ و نقرأ: a يوافق b بترديد n .

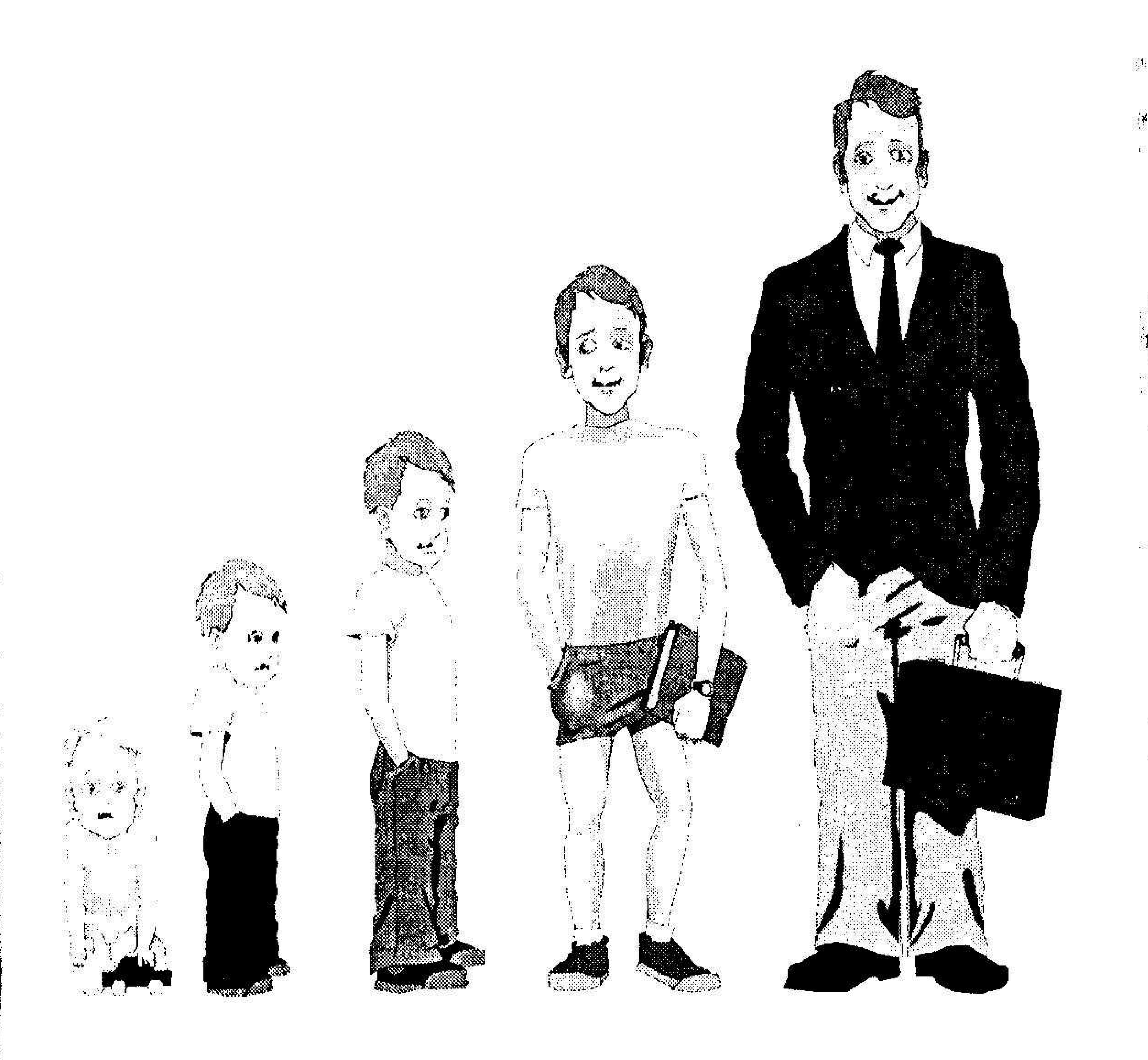
ملاحظات:

x و y عددان صحيحان و n عدد طبيعي غير معدوم.

- $x \equiv y\,[n]$ يعني $x = kn + y$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.
- $x \equiv 0\,[n]$ يعني x يقبل القسمة على n .
- $x \equiv 0\,[1]$ من أجل كل عدد صحيح x .
- $x \equiv y\,[n]$ يعني $(x-y)$ مضاعف لـ n .

خواص :

n عدد طبيعي غير معدوم أكبر تماما من 1 و a ، b ، c ، d أعدادا صحيحة.



- كل عدد صحيح a يوافق باقي قسمته r على n بترديد n أي : $a \equiv r\,[n]$.
- من اجل كل عدد صحيح a فإن $a \equiv a\,[n]$.
- إذا كان $a \equiv b\,[n]$ فإن $b \equiv a\,[n]$.
- إذا كان ($a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$) فإن $a + c \equiv b + d\,[n]$
- إذا كان ($a \equiv b\,[n]$ و $c \equiv d\,[n]$) فإن $ac \equiv bd\,[n]$
- إذا كان $a \equiv b\,[n]$ فإنه من أجل كل عدد طبيعي p $a^p \equiv b^p\,[n]$.
- إذا كان $a \equiv b\,[n]$ فإنه من أجل كل عدد صحيح k $ka \equiv kb\,[n]$.
- إذا كان $ka \equiv kb\,[kn]$ فإنه من أجل كل عدد صحيح k غير معدوم $a \equiv b\,[n]$.
- إذا كان $ka \equiv kb\,[n]$ و (k و n أوليان فيما بينهما) فإن $a \equiv b\,[n]$.

تمارين محلولة

تمرين 1

أ) ما هو باقي قسمة الأعداد الآتية على 7

12^{2003} ، 4000^{500} ، 772^{1450} .

ب) عين باقي قسمة الأعداد الآتية على 6

10^{3000} ، 15^{2003} ، 8^{200} ، 17^{2003} .

الحـــل

أ) $12^0 \equiv 1[7]$ ، $12^1 \equiv 5[7]$ ، $12^2 \equiv 4[7]$ ، $12^3 \equiv 6[7]$ ،

$12^4 \equiv 2[7]$ ، $12^5 \equiv 3[7]$ ، $12^6 \equiv 1[7]$ فالدور هو 6 .

لدينا : $2003 = 6 \times 333 + 5$ (شكل $6k + 5$)

ومنه : $12^{2003} \equiv 3[7]$.

$4000^0 \equiv 1[7]$ ، $4000^1 \equiv 3[7]$ ، $4000^2 \equiv 2[7]$ ،

$4000^3 \equiv 6[7]$ ، $4000^4 \equiv 4[7]$ ، $4000^5 \equiv 5[7]$ ،

$4000^6 \equiv 1[7]$ فالدور هو 6 .

لدينا : $500 = 6 \times 83 + 2$ (شكل $6k + 2$)

ومنه : $4000^{500} \equiv 2[7]$.

$772^0 \equiv 1[7]$ ، $772^1 \equiv 2[7]$ ، $772^2 \equiv 4[7]$ ،

$772^3 \equiv 1[7]$ فالدور هو 3 .

لدينا : $1450 = 3 \times 483 + 1$ (شكل $3k + 1$)

ومنه : $772^{1450} \equiv 2[7]$.

ب) $10^0 \equiv 1[6]$ ، $10^1 \equiv 4[6]$ ، $10^2 \equiv 4[6]$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $10^n \equiv 4[6]$

إذن $10^{3000} \equiv 4[6]$.

$15^0 \equiv 1[6]$ ، $15^1 \equiv 3[6]$ ، $15^2 \equiv 3[6]$

من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $15^n \equiv 3[6]$

إذن $15^{2003} \equiv 3[6]$.

$8^0 \equiv 1[6]$ ، $8^1 \equiv 2[6]$ ، $8^2 \equiv 4[6]$ ، $8^3 \equiv 2[6]$ ، $8^4 \equiv 4[6]$

نلاحظ أنه إذا كان n زوجيا فإن $8^n \equiv 4[6]$ ، و إذا كان n فرديا فإن $8^n \equiv 2[6]$ ومنه : $8^{200} \equiv 4[6]$.

$17^0 \equiv 1[6]$ ، $17^1 \equiv 5[6]$ ، $17^2 \equiv 1[6]$ فالدور هو 2

لدينا : $2003 = 2\times 1001+1$ (شكل $2k+1$)

ومنه : $17^{2003} \equiv 5[6]$.

تمرين 2

عين باقي القسمة الإقليدية على 11 لكل من الأعداد التالية:

$137^{137} - 56^{56}$ ، $4^{444}\times 10^{1000}$ ، $119^{5430}+125^{125}$.

الحـــل

* $137 \equiv 5[11]$ ومنه: $137^{137} \equiv 5^{137}[11]$.

$56 \equiv 1[11]$ ومنه : $56^{56} \equiv 1[11]$.

$5^0 \equiv 1[11]$ ، $5^1 \equiv 5[11]$ ، $5^2 \equiv 3[11]$ ، $5^3 \equiv 4[11]$ ، $5^4 \equiv 9[11]$ ، $5^5 \equiv 1[11]$. الدور هو 5 .

$137 = 5\times 27+2$ (شكل $5k+2$) ومنه : $5^{137} \equiv 3[11]$

ومنه: $137^{137} - 56^{56} \equiv 3-1 \equiv 2[11]$.

* $4^0 \equiv 1[11]$ ، $4^1 \equiv 4[11]$ ، $4^2 \equiv 5[11]$ ، $4^3 \equiv 9[11]$ ، $4^4 \equiv 3[11]$ ، $4^5 \equiv 1[11]$. الدور هو 5 .

$444 = 5\times 88+4$ ومنه : $4^{444} \equiv 3[11]$

$10^{1000} \equiv (-1)^{1000}[11] \equiv 1[11]$ ومنه:

$4^{444}\times 10^{1000} \equiv 3\times 1 \equiv 3[11]$.

* $119^0 \equiv 1[11]$ ، $119^1 \equiv 9[11]$ ، $119^2 \equiv 4[11]$ ، $119^3 \equiv 3[11]$ ، $119^4 \equiv 5[11]$ ، $119^5 \equiv 1[11]$

فالدور هو 5 . $5430 = 5\times 1086$ (شكل $5k$)

ومنه : $119^{5430} \equiv 1[11]$.

* $125^0 \equiv 1[11]$ ، $125^1 \equiv 4[11]$ ، $125^2 \equiv 5[11]$ ، $125^3 \equiv 9[11]$ ، $125^4 \equiv 3[11]$ ، $125^5 \equiv 1[11]$

فالدور هو 5 . $125 = 5\times 25$ (شكل $5k$)

ومنه : $125^{125} \equiv 1[11]$

ومنه : $119^{5430}+125^{125} \equiv 2[11]$.

تمرين 3

1) أ- أدرس حسب قيم العدد n باقي قسمة 17^n على 7 .

ب- عين باقي قسمة كل من الأعداد التالية :

17^{2003} ، 36×17^{1962} على 7 .

2) عين قيم العدد الطبيعي n لكي العدد $5\times 17^{6n+3}+2\times 17^{n+2}$ يقبل القسمة على 7 .

الحـــــل

1) أ- $17^0\equiv 1[7]$ ، $17^1\equiv 3[7]$ ، $17^2\equiv 2[7]$ ،

$17^3\equiv 6[7]$ ، $17^4\equiv 4[7]$ ، $17^5\equiv 5[7]$ ، $17^6\equiv 1[7]$

فالدور هو 6 .

$17^{6k}\equiv 1[7]$ ، $17^{6k+1}\equiv 3[7]$ ، $17^{6k+2}\equiv 2[7]$ ،

$17^{6k+3}\equiv 6[7]$ ، $17^{6k+4}\equiv 4[7]$ ، $17^{6k+5}\equiv 5[7]$.

ب- $2003=6\times 333+5$ (شكل $6k+5$) ومنه :

$17^{2003}\equiv 5[7]$.

$1962=6\times 327$ (شكل $6k$) ومنه : $17^{1962}\equiv 1[7]$ ،

$36\times 17^{1962}\equiv 1\times 1\equiv [7]$.

2) $17^{6n+3}\equiv 6[7]$ ، $2\times 17^{n+2}\equiv 2\times 17^n\times 17^2\equiv 4\times 17^n[7]$

$5\times 17^{6n+3}+2\times 17^{n+2}\equiv 5\times 6+4\times 17^n\equiv 2+4\times 17^n[7]$

$5\times 17^{6n+3}+2\times 17^{n+2}$ يقبل القسمة على7 إذا كان

$2+4\times 17^n\equiv 0[7]$ ومنه : $2\left(1+2\times 17^n\right)\equiv 0[7]$ ومنه :

$1+2\times 17^n\equiv 0[7]$.

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$17^n\equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$1+2\times 17^n\equiv$	3	0	5	6	2	4	[7]

نستنتج من الجدول أنه إذا كان $n=6k+1$ فإن العدد $5\times 17^{6n+3}+2\times 17^{n+2}$ يقبل القسمة على 7 .

تمرين 4

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

أ - $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 17 .

ب - $n\left(n^4-1\right)$ يقبل القسمة على 5 .

جـ - 7^n+3n-1 من مضاعفات العدد9 .

الحـــــل

أ-

$$3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}\equiv 3\times 5\times\left(5^2\right)^n+2\times\left(2^3\right)^n[17]$$

$$\equiv 15\times(25)^n+2\times 8^n[17]$$

$$\equiv 15\times 8^n+2\times 8^n[17]$$

$$\equiv 17\times 8^n\equiv 0[17]$$

ب —

$n\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$n^4-1\equiv$	4	0	0	0	0	[5]
$n\left(n^4-1\right)\equiv$	0	0	0	0	0	[5]

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $n\left(n^4-1\right)\equiv 0[5]$.

جـ - $7^0 \equiv 1[9]$ ، $7^1 \equiv 7[9]$ ، $7^2 \equiv 4[9]$ ، $7^3 \equiv 1[9]$ ،
فالدور هو 3 .

- إذا كان $n = 3k$ فإن: $7^n + 3n - 1 \equiv 1 + 9k - 1 \equiv 0[9]$.
- إذا كان $n = 3k + 1$ فإن :

$$7^n + 3n - 1 \equiv 7 + 3(3k+1) - 1 \equiv 7 + 9k + 2 \equiv 0[9]$$

- إذا كان $n = 3k + 2$ فإن

$$7^n + 3n - 1 \equiv 4 + 3(3k+2) - 1 \equiv 9k + 9 \equiv 0[9] .$$

إذن مهما يكن العدد الطبيعي n فإن العدد $7^n + 3n - 1$ من مضاعفات العدد9 .

تمرين 5

1) ما هو باقي قسمة مربع عدد طبيعي على 5 ؟
2) ما هو باقي قسمة مربع عدد فردي على 8 ؟
3) ما هو باقي قسمة مكعب عدد طبيعي على 5 ؟

الحـــــل

(1

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1	$[5]$

نلاحظ أن باقي قسمة مربع عدد طبيعي على 5 هو 0 إذا كان $n = 5k$ مع $k \in \mathbb{N}$.
و إذا كان $n = 5k + 1$ أو $n = 5k + 4$ فإن باقي قسمة n^2 على 5 هو 1 .
و إذا كان $n = 5k + 2$ أو $n = 5k + 3$ فإن باقي قسمة n^2 على 5 هو 4 .

2) نعلم أن شكل العدد الطبيعي الفردي هو $n = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 8h + 1$$

(لأن $k(k+1)$ هو جداء عددين متتاليين فهو عدد زوجي أي $2h$
فباقي $n^2 \equiv 8h + 1 \equiv 1[8]$ قسمة مربع عدد فردي على 8 هو 1 .

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$n^3 \equiv$	0	1	3	2	4	$[5]$

تمرين 6

عين في كل حالة من الحالات التالية العداد الطبيعية n بحيث يكون:

1) $n^2 + 3n + 1$ يقبل القسمة على 5 .
2) $n^3 + n + 2$ من مضاعفات العدد 7 .
3) $2^n + 2^{3n+2} + 2^{6n+1} + 4 \equiv 0[7]$.

الحـــــل

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$n^2 \equiv$	0	1	4	4	1	$[5]$
$n^2 + 3n + 1 \equiv$	1	0	1	4	4	$[5]$

يكون العدد $n^2 + 3n + 1$ قابلا القسمة على 5 إذا كان $n = 5k + 1$ مع $k \in \mathbb{N}$.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	$[7]$
$n^3 \equiv$	0	1	1	6	1	6	6	$[7]$
$n^3 + n + 2 \equiv$	2	4	5	4	0	6	0	$[7]$

يكون العدد n^3+n+2 من مضاعفات العدد 7 إذا كان $n=7k+4$ أو $n=7k+6$.

3) $2^0\equiv1[7]$ ، $2^1\equiv2[7]$ ، $2^2\equiv4[7]$ ، $2^3\equiv1[7]$ فالدور هو 3 ومنه : $2^{3n+2}\equiv4[7]$ و $2^{6n+1}\equiv\left(2^{3n}\right)^2\times2\equiv2[7]$

و $2^n+2^{3n+2}+2^{6n+1}+4\equiv2^n+4+2+4\equiv2^n+3[7]$

$n\equiv$	0	1	2	[3]
$2^n\equiv$	1	2	4	[7]
$2^n+3\equiv$	4	5	0	[7]

إذا كان $n=3k+2$ فإن $2^n+2^{3n+2}+2^{6n+1}+4\equiv0[7]$

تمرين 7

1) أدرس حسب قيم n بواقي القسمة الاقليدية لـ 3^n على 7.

2) أ – عين باقي قسمة العدد 3^{2003} على 7 .

ب – برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي k فإن :

$2\times3^{6k+1}-3^{12k+3}\equiv0[7]$.

3) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2\times3^{n+1}-3^{6n+2}+1\equiv0[7]$.

الحـــــل

$3^0\equiv1[7]$ ، $3^1\equiv3[7]$ ، $3^2\equiv2[7]$ ، $3^3\equiv6[7]$ ،

$3^4\equiv4[7]$ ، $3^5\equiv5[7]$ ، $3^6\equiv1[7]$ فالدور هو 6 .

ومنه : $3^{6k}\equiv1[7]$ ، $3^{6k+1}\equiv3[7]$ ، $3^{6k+2}\equiv2[7]$ ،

$3^{6k+3}\equiv6[7]$ ، $3^{6k+4}\equiv4[7]$ ، $3^{6k+5}\equiv5[7]$.

2) أ - $2003=6\times333+5$ (من الشكل $6k+5$) ومنه :

$3^{2003}\equiv5[7]$.

ب -

$$2\times3^{6k+1}-3^{12k+3}\equiv2\times3-\left(3^{6k}\right)^2\times3^3\equiv6-1\times6\equiv0[7]$$

3)

$$2\times3^{n+1}+3^{6n+2}+1\equiv6\times3^n+2+1\equiv3\left(2\times3^n+1\right)\equiv0[7]$$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$3^n\equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$2\times3^n+1\equiv$	3	0	5	6	2	4	[7]

مجموعة الأعداد الطبيعية المطلوبة هي : $n=6k+1$.

تمرين 8

1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة لـ 5^n على 13 .

2) أ – ما هو باقي قسمة العدد 239^{2003} على 13 ؟

ب – برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :

$2\times25^{2k+1}+5^{4k+3}+7\equiv0[13]$.

3) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $5^n+5^{2n}+1\equiv5[7]$.

الحـــل

1) $5^0\equiv1[13]$ ، $5^1\equiv5[13]$ ، $5^2\equiv12[13]$ ، $5^3\equiv8[13]$

، $5^4\equiv1[13]$ فالدور هو 4 . ومنه : $5^{4k}\equiv1[13]$ ،

$5^{4k+1}\equiv5[13]$ ، $5^{4k+2}\equiv12[13]$ ، $5^{4k+3}\equiv8[13]$.

2) أ- $239\equiv5[13]$ ومنه : $239^{2003}\equiv5^{2003}[13]$

و بما أن $2003=4\times500+3$ (شكل $4k+3$) فإن :

$5^{2003}\equiv8[13]$ إذن $239^{2003}\equiv8[13]$.

ب)
$$2\times25^{2k+1}+5^{4k+3}+7\equiv2\times\left(5^2\right)^{2k+1}+5^{4k+3}+7$$
$$\equiv2\times5^{4k+2}+5^{4k+3}+7\equiv2\times12+8+7\equiv0[13]$$

3)

$n\equiv$	0	1	2	3	[4]
$5^n\equiv$	1	5	12	8	[13]
$5^{2n}\equiv$	1	12	1	12	[13]
$5^n+5^{2n}+1\equiv$	3	5	1	8	[13]

إذا كان $n=4k+1$ فإن $5^n+5^{2n}+1\equiv5[13]$.

تمرين 9

1) n عدد طبيعي ، أدرس باقي قسمة كل من العددين 3^n و 7^n على 5 .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $2\times41^n+3\times7^{12n}$ يقبل القسمة على 5 .

3) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق $5\times3^n+2\times7^n\equiv2[5]$.

الحـــل

1) $3^0\equiv1[5]$ ، $3^1\equiv3[5]$ ، $3^2\equiv4[5]$ ، $3^3\equiv2[5]$ ،

$3^4\equiv1[5]$ فالدور هو 4 . ومنه $3^{4k}\equiv1[5]$ ،

$3^{4k+1}\equiv3[5]$ ، $3^{4k+2}\equiv4[5]$ ، $3^{4k+3}\equiv2[5]$.

$7^0\equiv1[5]$ ، $7^1\equiv2[5]$ ، $7^2\equiv4[5]$ ،

$7^3\equiv3[5]$ ، $7^4\equiv1[5]$.

$7^{4k}\equiv1[5]$ ، $7^{4k+1}\equiv2[5]$ ،

$7^{4k+2}\equiv4[5]$ ، $7^{4k+3}\equiv3[5]$.

$$2\times41^n+3\times7^{12n}\equiv2\times(1)^n+3\times\left(7^{4n}\right)^3\equiv2+3\times1\equiv0[5]$$

3)

$n\equiv$	0	1	2	3	[4]
$3^n\equiv$	1	3	4	2	[5]
$7^n\equiv$	1	2	4	3	[5]
$5\times3^n+2\times7^n\equiv$	2	4	3	1	[5]

من الجدول نستنتج أن : $n=4k$ $(k\in\mathbb{N})$

تمرين 10

1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 7^n على 11 .

2) برهن بأن العدد $7^{10n}-1$ يقبل القسمة على 11 مهما يكن العدد الطبيعي n .

3) برهن بأنه من أجل كل عدد طبيعي n فالعدد $7^{10n}-1$ يقبل القسمة على 66 .

4) عين باقي قسمة العدد $49^{5n+1}+18^{20n+3}-23^n+1$ على 11 .

الحـــــل

1) $7^0\equiv1[11]$ ، $7^1\equiv7[11]$ ، $7^2\equiv5[11]$ ، $7^3\equiv2[11]$ ،

$7^4\equiv3[11]$ ، $7^5\equiv10[11]$ ، $7^6\equiv4[11]$ ، $7^7\equiv6[11]$ ،

$7^8\equiv9[11]$ ، $7^9\equiv8[11]$ ، $7^{10}\equiv1[11]$.

$7^{10k}\equiv1[11]$ ، $7^{10k+1}\equiv7[11]$ ، $7^{10k+2}\equiv5[11]$ ،

$7^{10k+3}\equiv2[11]$ ، $7^{10k+4}\equiv3[11]$ ، $7^{10k+5}\equiv10[11]$ ،

$7^{10k+6}\equiv4[11]$ ، $7^{10k+7}\equiv6[11]$ ، $7^{10k+8}\equiv9[11]$ ،

$7^{10k+9}\equiv8[11]$.

2) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $7^{10n}\equiv1[11]$ ومنه :

$7^{10n}-1\equiv0[11]$.

3) $7\equiv1[6]$ ومنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $7^{10n}\equiv1[6]$

ومنه : $7^{10n}-1\equiv0[6]$ فالعدد $7^{10n}-1$ يقبل القسمة على 6 .

بما أن العدد $7^{10n}-1$ بقبل القسمة على 11 و على 6

و $PGCD(6;11)=1$ فالعدد $7^{10n}-1$ يقبل القسمة على الجداء $6\times11=66$.

4) $49^{5n+1}+18^{20n+3}-23^n+1\equiv(7^2)^{5n+1}+7^{20n+3}-1^n+1$

$\equiv7^{10n+2}+7^{20n}\times7^3[11]$

و $7^{10n+2}+(7^{10n})^2\times7^3\equiv5+1\times2\equiv7[11]$ إذن باقي قسمة العدد $49^{5n+1}+18^{20n+3}-23^n+1$ على 11 هو 7 .

تمرين 11

1) أدرس بواقي قسمة العددين 5^n و 3^n على 8.

2) عين باقي قسمة العدد $2\times5^{2003}+3^{2003}$ على 8.

3) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون : $5\times3^n+3$ قابلا القسمة على 8.

4) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $5^n-3^n\equiv0[8]$.

الحـــــل

1) $5^0\equiv1[8]$ ، $5^1\equiv5[8]$ ، $5^2\equiv1[8]$ فالدور هو 2

ومنه $5^{2k}\equiv1[8]$ ، $5^{2k+1}\equiv5[8]$.

$3^0\equiv1[8]$ ، $3^1\equiv3[8]$ ، $3^2\equiv1[8]$ فالدور هو 2

ومنه $3^{2k}\equiv1[8]$ ، $3^{2k+1}\equiv3[8]$.

2) $2003=2\times1001+1$ (الشكل $2k+1$) إذن $5^{2003}\equiv5[8]$

و $3^{2003}\equiv3[8]$ ومنه : $2\times5^{2003}+3^{2003}\equiv5[8]$.

3) $5\times3^n+3\equiv0[8]$

$n \equiv$	0	1	[2]
$3^n \equiv$	1	3	[8]
$5\times 3^n + 3 \equiv$	0	2	[8]

الأعداد الطبيعية المطلوبة هي $n = 2k$ (مع $k \in \mathbb{N}$)

4) $5^n - 3^n \equiv 0[8]$.

$n \equiv$	0	1	[2]
$5^n \equiv$	1	5	[8]
$3^n \equiv$	1	3	[8]
$5^n - 3^n \equiv$	0	2	[8]

ومنه : $n = 2k$ (مع $k \in \mathbb{N}$) .

تمرين 12

1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 11^n و 12^n على 7.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :
$4\times 4^{3k+2} + 2\times 25^{3k+1} \equiv 2[7]$.

3) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $2\times 11^n - 11^{3n+1} \equiv 0[7]$.

4) عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث : $12^x - 11^y \equiv 4[7]$.

الحل

$11^0 \equiv 1[7]$ ، $11^1 \equiv 4[7]$ ، $11^2 \equiv 2[7]$ ، $11^3 \equiv 1[7]$

فالدور هو 3 ومنه :

$11^{3k} \equiv 1[7]$ ، $11^{3k+1} \equiv 4[7]$ ، $11^{3k+2} \equiv 2[7]$.

$12^0 \equiv 1[7]$ ، $12^1 \equiv 5[7]$ ، $12^2 \equiv 4[7]$ ، $12^3 \equiv 6[7]$ ،
$12^4 \equiv 2[7]$ ، $12^5 \equiv 3[7]$ ، $12^6 \equiv 1[7]$ فالدور هو 6.

ومنه : $12^{6k} \equiv 1[7]$ ، $12^{6k+1} \equiv 5[7]$ ، $12^{6k+2} \equiv 4[7]$ ،
$12^{6k+3} \equiv 6[7]$ ، $12^{6k+4} \equiv 2[7]$ ، $12^{6k+5} \equiv 3[7]$.

(2 $4\times 4^{3k+2} + 2\times 25^{3k+1} \equiv 4\times 11^{3k+2} + 2\times \left(5^2\right)^{3k+1}$

$\equiv 4\times 11^{3k+2} + 2\times 5^{6k+2} \equiv 4\times 11^{3k+2} + 2\times 12^{6k+2}$

$\equiv 8+8 \equiv 2[7]$

(3 $2\times 11^n - 11^{3n+1} \equiv 2\times 11^n - 4 \equiv 0[7]$

$n \equiv$	0	1	2	[3]
$11^n \equiv$	1	4	2	[7]
$2\times 11^n - 4 \equiv$	5	4	0	[7]

حلول المعادلة المعطاة هو : $n = 3k + 2$ (مع $k \in \mathbb{N}$)

(4 $12^{6k+3} - 11^{3k+2} \equiv 4[7]$ و $12^{6k+5} - 11^{3k} \equiv 4[7]$

و $12^{6k+1} - 11^{3k} \equiv 4[7]$ و $12^{6k} - 11^{3k+1} \equiv 4[7]$ ومنه :

الثنائيات المطلوبة $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ هي : $(6k+5;3k)$ ،
$(6k+3;3k+2)$ ، $(6k+1;3k)$ ، $(6k;3k+1)$.

تمرين 13

1) n عدد طبيعي ، احسب بدلالة n المجموع S_n المعرف بـ:

. $S_n = 1+3+3^2+...+3^{n-1}$

2) أدرس بواقي قسمة 3^n على 7.

3) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث: $2S_n + 9^{3n+1} \equiv 0[7]$

4) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $2\times 3^n + 9^n - 1 \equiv 0[7]$

الحـــــل

1) S_n هو مجموع n حد الأولى لمتتالية هندسية حدها الأول 1

و أساسها $q = 3$ و منه : $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$.

2) $3^0 \equiv 1[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ،

$3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^5 \equiv 5[7]$ ، $3^6 \equiv 1[7]$ فالدور هو 6 .

$3^{6k} \equiv 1[7]$ ، $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ ، $3^{6k+2} \equiv 2[7]$ ،

$3^{6k+3} \equiv 6[7]$ ، $3^{6k+4} \equiv 4[7]$ ، $3^{6k+5} \equiv 5[7]$.

3) $2S_n + 9^{3n+1} \equiv 3^n - 1 + 3^{6n+2} \equiv 3^n + 1 \equiv 0[7]$

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	$[7]$
$3^n + 1 \equiv$	2	4	3	0	5	6	$[7]$

ومنه: $n = 6k + 3$ (مع $k \in \mathbb{N}$)

4) $2\times 3^n + 9^n - 1 \equiv 2\times 3^n + 3^{2n} - 1 \equiv 0[7]$.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$3^n \equiv$	1	3	2	6	4	5	$[7]$
$3^{2n} \equiv$	1	2	4	1	2	4	$[7]$
$2\times 3^n + 9^n - 1 \equiv$	2	0	0	5	2	6	$[7]$

ومنه حلول المعادلة هي: $n = 6k + 1$ و $n = 6k + 2$

. ($k \in \mathbb{N}$ مع)

<u>تمرين 14</u>

n عدد طبيعي و $a = n\left(n^4 - 1\right)$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $n\left(n^4 - 1\right) \equiv 0[5]$.

2)برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن a يقبل القسمة على 6 .

3) استنتج أن العدد $n\left(n^4 - 1\right)$ يقبل القسمة على 30 .

4) أ- تحقق أن a يقبل القسمة على 3 .

ب – باستعمال السؤال السابق هل نستطيع أن نقول بان العدد a يقبل القسمة على 90؟

الحـــــل

(1

$n \equiv$	0	1	2	3	4	$[5]$
$n^4 \equiv$	0	1	1	1	1	$[5]$
$n\left(n^4 - 1\right) \equiv$	0	0	0	0	0	$[5]$

نستنتج من الجدول أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن :
$.n\left(n^4-1\right)\equiv 0[5]$

(2
$$a=n\left(n^4-1\right)=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+1\right)$$
$$=n\left(n+1\right)\left(n-1\right)\left(n^2+1\right)$$

نعلم أن جداء عددين متتاليين هو من مضاعفات العدد 2 أي $n\left(n+1\right)=2h$ و جداء ثلاثة أعداد متتالية $\left(n-1\right)n\left(n+1\right)$ هو من مضاعفات 3 ، فالعدد a يقبل القسمة على 2 و 3 وهما أوليان فيما بينهما حسب خواص تطبيقات غوص فالعدد a يقبل القسمة على الجداء 2×3 أي على 6.
(يمكن استعمال طريقة الجدول للوصول إلى هذه النتيجة) .

3) بما أن العدد a يقبل القسمة على 5 و على 6
و $PGCD\left(5;6\right)=1$ حسب تطبيقات غوص فالعدد a
يقبل القسمة على الجداء 6×5 أي على 30 .

4) أ- نعلم من السؤال السابق أن العدد a يقبل القسمة على 30.
العدد a يقبل القسمة على 30 و على 3 و بما أن 30 و 3 ليس أوليين فيما بينهما فلا نستطيع أن نقول أن a يقبل القسمة على جدائهما 90.

تمرين 15

1) أدرس بواقي قسمة العدد 5^n على31 .
2)أ- عين باقي قسمة العدد 5^{2003} على 31 .
ب – عين الأعداد الطبيعية n بحيث $311\times 5^n+1\equiv 6[31]$.
3) برهن أنه إذا كان العدد الطبيعي n ليس من مضاعفات 3 فإن العدد $5^n+5^{2n}+1$ يقبل القسمة على 31 .

الحل

1) $5^0\equiv 1[31]$ ، $5^1\equiv 5[31]$ ، $5^2\equiv 25[31]$ ، $5^3\equiv 1[31]$
فالدور 3 ومنه : $5^{3k}\equiv 1[31]$ ، $5^{3k+1}\equiv 5[31]$ ،
$5^{3k+2}\equiv 25[31]$.

2) أ- بما أن $2003=3\times 667+2$ (شكل $3k+2$) فإن :
$5^{2003}\equiv 25[31]$.

ب -

$n\equiv$	0	1	2	$[3]$
$5^n\equiv$	1	5	25	$[31]$
$311\times 5^n+1\equiv$	2	6	26	$[31]$

نلاحظ من الجدول أن : $n=3k+1$.

3) n ليس من مضاعفات 3 يعني أن $n=3k+1$ أو $n=3k+2$ ($k\in\mathbb{N}$)
إذا كان $n=3k+1$ فإن :
$$5^n+5^{2n}+1\equiv 5^{3k+1}+\left(5^{3k+1}\right)^2+1\equiv 5+25+1\equiv 0[31]$$
إذا كان $n=3k+2$ فإن :
$$5^n+5^{2n}+1\equiv 5^{3k+2}+\left(5^{3k+2}\right)^2+1\equiv 25+625+1\equiv 0[31]$$

تمرين 16

1) برهن أنه إذا كانت الأعداد الطبيعية a ، b ، c ليست من مضاعفات 3 فإن : $a^2+b^2+c^2\equiv 0[3]$.

2) عين باقي قسمة العدد $31^n + 29^n$ على 3 .

3) برهن أنه إذا كان عددا طبيعيا ليس من مضاعفات العدد 5 فيكون مربعه من الشكل $5k \pm 1$ $(k \in \mathbb{N})$

الحــــل

1) العدد الذي ليس من مضاعفات 3 هو من الشكل $3k+1$ أو $3k+2$ حيث $k \in \mathbb{N}$ فيكون :

$(3k+1)^2 \equiv 1[3]$ و $(3k+2)^2 \equiv 4 \equiv 1[3]$ ومنه :

مهما يكن العدد الطبيعي n و $n \neq 3k$ (مع $k \in \mathbb{N}$) فإن :

$n^2 \equiv 1[3]$. إذن إذا كانت الأعداد الطبيعية a ، b ، c ليست من مضاعفات 3 فإن : $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1+1+1 \equiv 0[3]$.

2) $31^n + 29^n \equiv 1 + 2^n \equiv 1 + (-1)^n [3]$ ومنه :

إذا كان n عددا فرديا فإن $1 + (-1)^n \equiv 1 - 1 \equiv 0[3]$.

و إذا كان n عددا زوجيا فإن $1 + (-1)^n \equiv 1 + 1 \equiv 2[3]$.

3) العدد الذي ليس من مضاعفات 5هو من الشكل $5k+1$ ، $5k+2$ ، $5k+3$ ، $5k+4$ و يكون مربعه يوافق ± 1 بترديد 5 كما نرى في الجدول الآتي :

$n \equiv$	1	2	3	4	[5]
$n^2 \equiv$	1	-1	-1	1	[5]

ومنه $n^2 \equiv \pm 1[5]$ ومنه : $n^2 = 5k \pm 1$ $(k \in \mathbb{N})$

تمرين 17

1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كلا من العددين 8^n و 9^n على 13 .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن العدد $\left(3^{6n+2} - 2 \times 64^{2n+1} + 2\right)$ يقبل القسمة على 13 .

3) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $\left(3^{6n} - 2003^{2n+1} + 30n^2 - 1\right)$ قابلا القسمة على 13 .

4) عين الأعداد الطبيعية n بحيث يكون $8^n - 38^n \equiv 9[13]$

الحــــل

1) $8^0 \equiv 1[13]$ ، $8^1 \equiv 8[13]$ ، $8^2 \equiv 12[13]$ ، $8^3 \equiv 5[13]$

، $8^4 \equiv 1[13]$ فالدور هو 4. ومنه : $8^{4k} \equiv 1[13]$ ،

$8^{4k+1} \equiv 8[13]$ ، $8^{4k+2} \equiv 12[13]$ ، $8^{4k+3} \equiv 5[13]$.

$9^0 \equiv 1[13]$ ، $9^1 \equiv 9[13]$ ، $9^2 \equiv 3[13]$ ، $9^3 \equiv 1[13]$

فالدور هو 3 . ومنه :

$9^{3k} \equiv 1[13]$ ، $9^{3k+1} \equiv 9[13]$ ، $9^{3k+2} \equiv 3[13]$.

2) $3^{6n+2} - 2 \times 64^{2n+1} + 2 \equiv \left(3^2\right)^{3n+1} - 2 \times \left(8^2\right)^{2n+1} + 2$

$\equiv 9^{3n+1} - 2 \times 8^{4n+2} + 2 \equiv 9 - 24 + 2 \equiv 0[13]$

$3^{6n} - 2003^{2n+1} + 30n^2 - 1 \equiv 0[13]$ ومنه:

$9^{3n} - 1 + 4n^2 - 1 \equiv 4n^2 - 1 \equiv 0[13]$ ومنه:

ومنه : $(2n-1)(2n+1)\equiv 0[13]$: $2n-1\equiv 0[13]$.

أو $2n+1\equiv 0[13]$ (لأن 13 عددا أوليا) .

$2n-1\equiv 0[13]$ يكافئ $2n\equiv 1[13]$ ومنه: $7\times 2n\equiv 7[13]$

ومنه : $n=13k+7$.

$2n+1\equiv 0[13]$ ومنه : $2n\equiv -1\equiv 12[13]$ ومنه:

$n\equiv 6[13]$ ومنه : $n=13k+6$ ($k\in\mathbb{N}$).

4) $8^n-38^n\equiv 9[13]$ ومنه:

$8^n-12^n\equiv 8^n-(-1)^n\equiv 9[13]$

$n\equiv$	0	1	2	3	[4]
$8^n\equiv$	1	8	12	5	[13]
$8^n-(-1)^n\equiv$	0	9	11	6	[13]

ومنه : $n=4k+1$ (مع $k\in\mathbb{N}$)

تمرين 18

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة كلا من العددين 2^n و 3^n على 5.

2) استنتج باقي قسمة العدد $1999^{1999}+2002^{2002}+2003^{2003}$ على5 .

3) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $2^n+3^{2n}+4^n\equiv 0[5]$.

4) عين مجموعة قيم n التي تحقق :

$$\begin{cases} n\equiv 0[2] \\ 7^{4n+1}+2\times 8^{4n+2}+3n\equiv 0[5] \\ 10\leq n\leq 50 \end{cases}$$

الحـــل

1) $2^0\equiv 1[5]$ ، $2^1\equiv 2[5]$ ، $2^2\equiv 4[5]$ ، $2^3\equiv 3[5]$ ،

$2^4\equiv 1[5]$. فالدور هو 4 ومنه :

$2^{4k}\equiv 1[5]$ ، $2^{4k+1}\equiv 2[5]$ ، $2^{4k+2}\equiv 4[5]$ ،

$2^{4k+3}\equiv 2[5]$.

$3^0\equiv 1[5]$ ، $3^1\equiv 3[5]$ ، $3^2\equiv 4[5]$ ، $3^3\equiv 2[5]$ ،

$3^4\equiv 1[5]$. فالدور هو 4 ومنه : $3^{4k}\equiv 1[5]$ ، $3^{4k+1}\equiv 3[5]$ ،

$3^{4k+2}\equiv 4[5]$ ، $3^{4k+3}\equiv 2[5]$.

2) $1999^{1999}+2002^{2002}+2003^{2003}\equiv 4^{1999}+2^{2002}+3^{2003}$

$\equiv (-1)^{1999}+2^{2002}+3^{2003}[5]$

$2002=4\times 500+2$ (شكل $4k+2$)ومنه : $2^{2002}\equiv 4[5]$.

$2003=4\times 500+3$ ومنه : $3^{2003}\equiv 2[5]$.

ومنه : $(-1)^{1999}+2^{2002}+3^{2003}\equiv -1+4+2\equiv 0[5]$

3) $2^n+3^{2n}+4^n\equiv 2^n+3^{2n}+(-1)^n[5]$

$n \equiv$	0	1	2	3	[4]
$2^n \equiv$	1	2	4	3	[5]
$3^n \equiv$	1	3	4	2	[5]
$3^{2n} \equiv$	1	4	1	4	[5]
$2^n+3^{2n}+(-1)^n \equiv$	3	0	1	1	[5]

إذن حلول المعادلة $2^n+3^{2n}+4^n \equiv 0[5]$ هي : $n=4k+1$
(مع $k \in \mathbb{N}$)

4) $\begin{cases} n \equiv 0[2] \\ 7^{4n+1}+2\times 8^{4n+2}+3n \equiv 0[5] \\ 10 \le n \le 50 \end{cases}$ يكافئ :

$$\begin{cases} n \equiv 0[2] \\ 2^{4n+1}+2\times 3^{4n+2}+3n \equiv 10+3n \equiv 3n \equiv 0[5] \\ 10 \le n \le 50 \end{cases}$$

$\begin{cases} n \equiv 0[2] \\ 3n \equiv 0[5] \\ 10 \le n \le 50 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} n \equiv 0[2] \\ n \equiv 0[5] \\ 10 \le n \le 50 \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 5n \equiv 0[10] \\ 2n \equiv 0[10] \\ 10 \le n \le 50 \end{cases}$

ومنه: $\begin{cases} 3n \equiv 0[10] \\ 10 \le n \le 50 \end{cases}$ يكافئ: $\begin{cases} n \equiv 0[10] \\ 10 \le n \le 50 \end{cases}$ ومنه :

$n=10k$ (مع $k \in \mathbb{N}$) و $10 \le n \le 50$

إذن : $n \in \{10;20;30;40;50\}$.

تمرين 19

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة 16^n و 17^n على 7.

2) استنتج باقي قسمة العدد $16^{2003}+17^{2003}$ على7 .

3) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $16^n \times n+2n-1 \equiv 1[7]$.

4) عين مجموعة الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث:

$$2^x-3^y \equiv 1[7]$$

الحـــــل

1) $16^0 \equiv 1[7]$ ، $16^1 \equiv 2[7]$ ، $16^2 \equiv 4[7]$ ، $16^3 \equiv 1[7]$

فالدور هو 3 . ومنه:

$16^{3k} \equiv 1[7]$ ، $16^{3k+1} \equiv 2[7]$ ، $16^{3k+2} \equiv 4[7]$.

$17^0 \equiv 1[7]$ ، $17^1 \equiv 3[7]$ ، $17^2 \equiv 2[7]$ ، $17^3 \equiv 6[7]$ ،

$17^4 \equiv 4[7]$ ، $17^5 \equiv 5[7]$ ، $17^6 \equiv 1[7]$ فالدور هو 6 .

ومنه : $17^{6k} \equiv 1[7]$ ، $17^{6k+1} \equiv 3[7]$ ، $17^{6k+2} \equiv 2[7]$ ،

$17^{6k+3} \equiv 6[7]$ ، $17^{6k+4} \equiv 4[7]$ ، $17^{6k+5} \equiv 5[7]$.

2) $2003=3\times 667+2$ (شكل $3k+2$)ومنه: $16^{2003} \equiv 4[7]$

$2003 = 6\times 333 + 5$ (شكل $6k + 5$)ومنه: $17^{2003} \equiv 5[7]$

ومنه : $16^{2003} + 17^{2003} \equiv 4 + 5 \equiv 2[7]$.

3)- إذا كان : $n = 3k$ فإن

$16^n \times n + 2n - 1 \equiv 1\times 3k + 2\times 3k - 1 \equiv 2k - 1 \equiv 0[7]$

ومنه : $2k \equiv 1[7]$ ومنه : $k \equiv 4[7]$ ومنه : $k = 7h + 4$

إذن $n = 3k = 21h + 12$ (مع $h \in \mathbb{N}$)

- إذا كان : $n = 3k + 1$ فإن

$16^n \times n + 2n - 1 \equiv 2\times(3k+1) + 2\times(3k+1) - 1 \equiv 5k + 3 \equiv 0[7]$

ومنه $5k \equiv -3 \equiv 4[7]$ ومنه $k \equiv 5[7]$ ومنه : $k = 7h + 5$

إذن $n = 3k + 1 = 21h + 16$ (مع $h \in \mathbb{N}$)

- إذا كان : $n = 3k + 2$ فإن :

$16^n \times n + 2n - 1 \equiv 4n + 2n - 1$

$\equiv 6(3k+2) - 1 \equiv 4k + 4 \equiv 0[7]$

ومنه : $4k \equiv -4[7]$ ومنه : $k \equiv -1 \equiv 6[7]$ ومنه :

$k = 7h + 6$. إذن $n = 3k + 2 = 21h + 20$ (مع $h \in \mathbb{N}$)

إذن حلول المعادلة المعطاة هي:

$n = 21h + 12$ أو $n = 21h + 16$ أو $n = 21h + 20$.

4) $2^x - 3^y \equiv 1[7]$ ومنه: $16^x - 17^y \equiv 1[7]$ من السؤال السابق (1) نستنتج ما يلي:

$16^{3k+1} - 17^{6k} \equiv 1[7]$ و $16^{3k+2} - 17^{6k+1} \equiv 1[7]$ ومنه

الثنائيات المطلوبة هي :

$(x;y) \in \{(3k+1;6k);(3k+2;6k+1)\}$

تمرين 20

عين مجموعة الأعداد الطبيعية n في الحالات التالية:

1) $n + 4 \equiv 0[n-1]$.

2) $3n - 27 \equiv 0[n+3]$.

3) $n^2 + 2n + 3 \equiv 0[n-1]$.

4) $\begin{cases} n \equiv 2[7] \\ n \equiv 1[5] \end{cases}$

الحل

1) $n + 4 \equiv 0[n-1]$ يكافئ $(n-1) + 5 \equiv 0[n-1]$ ومنه:

$5 \equiv 0[n-1]$ ومنه: $(n-1)$ يقسم 5 يكافئ $(n-1) \in \{1;5\}$

ومنه: $n \in \{2;6\}$.

2) $3n - 27 \equiv 0[n+3]$ يكافئ $3(n+3) - 36 \equiv 0[n+3]$

ومنه: $36 \equiv 0[n+3]$ ومنه: $(n+3)$ يقسم 36

ومنه : $(n+3) \in \{1;2;3;4;6;9;12;18;36\}$

ومنه : $n \in \{0;1;3;6;9;15;33\}$.

3) $n^2 + 2n + 3 \equiv 0[n-1]$ يكافئ

$(n+3)(n-1) + 6 \equiv 0[n-1]$ ومنه : $6 \equiv 0[n-1]$

ومنه : $(n-1)$ يقسم 6 ومنه : $(n-1) \in \{1;2;3;6\}$

ومنه : $n \in \{2;3;4;7\}$.

4) $\begin{cases} n \equiv 2[7] \\ n \equiv 1[5] \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} 5n \equiv 10[35] \\ 7n \equiv 7[35] \end{cases}$

ومنه : $5n - 7n \equiv 10 - 7[35]$ ومنه : $-2n \equiv 3[35]$

ومنه : $2n \equiv -3 \equiv 32[35]$ ومنه : $n \equiv 16[35]$

ومنه : $n = 35k + 16$ (مع $k \in \mathbb{N}$).

تمرين 21

حل في $\mathbb{Z}$ المعادلات التالية:

1) $10x + 3 \equiv 0[7]$.

2) $3x \equiv 2[5]$.

3) $x^2 - 3x - 4 \equiv 0[5]$.

4) $(3x+1)(x-1) \equiv 0[7]$.

الحـــل

1) $10x + 3 \equiv 0[7]$ ومنه: $10x \equiv -3[7]$

ومنه : $3x \equiv -3[7]$ ومنه : $x \equiv -1[7]$

ومنه : $x = 7k - 1$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2) $3x \equiv 2[5]$ ومنه : $2 \times 3x \equiv 2 \times 2[5]$ ومنه : $x \equiv 4[5]$

ومنه : $x = 5k + 4$ $(k \in \mathbb{Z})$.

3)

$x \equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$x^2 \equiv$	0	1	4	4	1	[5]
$x^2 - 3x \equiv$	0	3	3	0	4	[5]
$x^2 - 3x - 4 \equiv$	1	4	4	1	0	[5]

ومنه : $x = 5k + 4$ $(k \in \mathbb{Z})$.

4) $(3x+1)(x-1) \equiv 0[7]$

ومنه: ($3x + 1 \equiv 0[7]$ أو $x - 1 \equiv 0[7]$)

* $3x + 1 \equiv 0[7]$ ومنه : $x \equiv 2[7]$ ومنه : $x = 7k + 2$.

* $x - 1 \equiv 0[7]$ ومنه : $x \equiv 1[7]$ ومنه : $x = 7k + 1$.

تمرين 22

1)نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x - 7y = 6$ ..... *

- باستعمال طريقة الموافقة بترديد n حل المعدلة * .

2)عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ والتي هي حل للمعادلة * بحيث :

$4 \le x \le 35$ و $0 \le y \le 30$.

3) عين أصغر عدد طبيعي a يحقق: $\begin{cases} a \equiv 4[7] \\ a \equiv -2[5] \end{cases}$

الحـــل

1) $5x - 7y = 6$ ومنه : $5x \equiv 6[7]$

ومنه : $3 \times 5x \equiv 3 \times 6[7]$ ومنه : $x \equiv 4[7]$

ومنه : $x = 7k + 4$ $(k \in \mathbb{Z})$.

$5x - 7y = 6$ ومنه : $-7y \equiv 6[5]$

ومنه : $-2y \equiv 1[5]$ ومنه : $3y \equiv 1[5]$

ومنه : $2 \times 3y \equiv 2[5]$ ومنه : $y \equiv 2[5]$ ومنه :

$y = 5k + 2$ $(k \in \mathbb{Z})$.

إذن حلول المعادلة هي:

$x = 7k + 4$ و $y = 5k + 2$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2) لدينا ($4 \le x \le 35$ و $0 \le y \le 30$) يكافئ

($4 \le 7k + 4 \le 35$ و $0 \le 5k + 2 \le 30$) يكافئ

($0 \le k \le \frac{31}{7}$ و $\frac{-2}{5} \le k \le \frac{28}{5}$ و $k \in \mathbb{Z}$)

إذن $k \in \{0;1;2;3;4\}$.

ومنه الثنائيات المطلوبة هي :

$(x;y) \in \{(4;2),(11;7),(18;12),(25;17),(32;22)\}$

3) $a \equiv 4[7]$ يكافئ $a = 7f + 4$ $(f \in \mathbb{N})$

و $a \equiv -2[5]$ يكافئ $a = 5h - 2$ $(h \in \mathbb{N}^*)$

ومنه : $5h - 2 = 7f + 4$ يكافئ $5h - 7f = 6$ و حسب السؤال (1) فإن : $h = 7k + 4$ و $f = 5k + 2$ حيث $k \in \mathbb{N}$.

ومنه: $a = 7f + 4 = 7(5k + 2) + 4 = 35k + 18$ و $k \in \mathbb{N}$.

و تكون أصغر قيمة للعدد الطبيعي a هي 18 ($k = 0$)

تمرين 23

1)حل المعادلة : $8x \equiv 11[7]$.

2)استنتج في $\mathbb{Z}^2$ حلول المعادلة $8x - 7y = 11$ .....*

3) ادرس بواقي قسمة العدد 4^n على 7.

4) نفرض أن $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ و حل للمعادلة * و نضع :

$S_n = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$ عن العدد الطبيعي n حيث :

$3S_n \equiv 0[7]$

الحل

1) $8x \equiv 11[7]$ ومنه: $x \equiv 4[7]$ يكافئ $x = 7k + 4 (k \in \mathbb{Z})$

2) $8x - 7y = 11$ ومنه $8x \equiv 11[7]$ و حسب السؤال (1) فإن $x = 7k + 4$ و بتعويض قيمة x في المعادلة * نجد:

$8(7k + 4) - 7y = 11$ ومنه: $7y = 8(7k + 4) - 11$ ومنه:

$y = 8k + 3$.

إذن حلول المعادلة * هي : $x = 7k + 4$ و $y = 8k + 3$.

3) $4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$.

فالدور هو 3. ومنه $4^{3k} \equiv 1[7]$ ، $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ ،

$4^{3k+2} \equiv 2[7]$.

4) لدينا $x = 7k + 4$ و

$$S_n = 1 + x + x^2 + ... + x^{n-1}$$

$$= 1 + (7k + 4) + (7k + 4)^2 + ... + (7k + 4)^{n-1}$$

ومنه: $S_n \equiv 1+4+4^2+...+4^{n-1}[7]$ و نعلم أن :

$$1+4+4^2+4^3+...+4^{n-1}=\frac{4^n-1}{3}$$

مجموع n حد الأولى لمتتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها $q=4$

$3S_n\equiv 0[7]$ ومنه: $4^n-1\equiv 0[7]$ ومنه : $4^n\equiv 1[7]$

إذن $n=3k$ حيث $k\in\mathbb{N}$.

تمرين 24

I) لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بـ:

$\begin{cases}u_0=2\\u_{n+1}-10u_n=9\end{cases}$ و $v_n-u_n=1$.

1) أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول و أساسها q

2) استنتج عبارة v_n ثم u_n بدلالة n .

3) احسب بدلالة n المجموع $S_n=u_0+u_1+...+u_n$.

II) 1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية لـ 10^n على 37 .

2) عين الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها $3[S_n+(n+1)]$ قابلا القسمة على 37.

الحـــل

I-1) تكون المتتالية (v_n) هندسية إذا تحقق ما يلي :

من أجل كل عدد طبيعي n فإن $v_{n+1}=v_n\times q$

$v_{n+1}=u_{n+1}+1=(10u_n+9)+1=10(u_n+1)=10v_n$

ومنه : (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0=u_0+1=3$

و أساسها $q=10$.

2) $v_n=v_0\times q^n=\boxed{3\times10^n}$ و $u_n=v_n-1=\boxed{3\times10^n-1}$

3) $S_n=u_0+u_1+...+u_n$

$=(v_0-1)+(v_1-1)+(v_2-1)+...+(v_n-1)$

$=(v_0+v_1+...+v_n)-(n+1)$

$=3\times\frac{10^{n+1}-1}{10-1}-(n+1)=\boxed{\frac{10^{n+1}-1}{3}-(n+1)}$

II-1) $10^0\equiv1[37]$ ، $10^1\equiv10[37]$ ، $10^2\equiv26[37]$ ،

$10^3\equiv1[37]$ فالدور هو 3.

$10^{3k}\equiv1[37]$ ، $10^{3k+1}\equiv10[37]$ ، $10^{3k+2}\equiv26[37]$.

2) $3[S_n+(n+1)]=10^{n+1}-1$ يكون العدد $3[S_n+(n+1)]$ قابلا القسمة على 37 إذا

كان $10^{n+1}-1\equiv0[37]$ ومنه : $10^{n+1}\equiv1[37]$

ونعلم أن $10^{3k}\equiv1[37]$ ومنه : $n+1=3k$ (مع $k\in\mathbb{N}$)

ومنه : $n=3k-1$ (مع $k\in\mathbb{N}^*$)

تمرين 25

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي قسمة العدد 5^n على 7.

2) عين باقي قسمة العدد $5^{1999}-19^{2000}$ على 7 .

3) عين العدد الطبيعي n الذي يحقق : $5^n+5^{2n}\equiv 2[7]$.

4) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $3\times 26^n+13^n\equiv 0[7]$.

الحل

1) $5^0\equiv 1[7]$ ، $5^1\equiv 5[7]$ ، $5^2\equiv 4[7]$ ، $5^3\equiv 6[7]$ ،
$5^4\equiv 2[7]$ ، $5^5\equiv 3[7]$ ، $5^6\equiv 1[7]$ فالدور هو 6 . ومنه :

$5^{6k}\equiv 1[7]$ ، $5^{6k+1}\equiv 5[7]$ ، $5^{6k+2}\equiv 4[7]$ ،
$5^{6k+3}\equiv 6[7]$ ، $5^{6k+4}\equiv 2[7]$ ، $5^{6k+5}\equiv 3[7]$.

2) $1999=6\times 333+1$ (شكل $6k+1$) ومنه:
$5^{1999}\equiv 5[7]$. $19\equiv 5[7]$ ومنه : $19^{2000}\equiv 5^{2000}[7]$.
$2000=6\times 333+2$ (شكل $6k+2$) ومنه
$19^{2000}\equiv 5^{2000}\equiv 4[7]$ ومنه $5^{1999}-19^{2000}\equiv 5-4\equiv 1[7]$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	$[7]$
$5^{2n}\equiv$	1	4	2	1	4	2	$[7]$
$5^n+5^{2n}\equiv$	2	2	6	0	6	5	$[7]$

ومنه : $n=6k$ أو $n=6k+1$ ($k\in\mathbb{N}$)

4) $3\times 26^n+13^n\equiv 3\times 5^n+(-1)^n\equiv 0[7]$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	$[6]$
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	$[7]$
$3\times 5^n+(-1)^n\equiv$	4	0	6	3	0	1	$[7]$

ومنه : $n=6k+1$ أو $n=6k+4$ ($k\in\mathbb{N}$)

تمرين 26

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي قسمة كلا من العددين 2^n و 5^n على 7.

2) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي k فإن :
$5\times 2^{3k+1}-5^{6k+3}+3\equiv 0[7]$.

3) عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون :

أ- $12^n+16^n-22^n\equiv 0[7]$.

ب- $19^{6n+3}-23^{3n+1}+4n^2+3$ قابلا القسمة على 7.

الحل

1) $2^0\equiv 1[7]$ ، $2^1\equiv 2[7]$ ، $2^2\equiv 4[7]$ ، $2^3\equiv 1[7]$ فالدور هو 3 ومنه : $2^{3k}\equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv 4[7]$

$5^0\equiv 1[7]$ ، $5^1\equiv 5[7]$ ، $5^2\equiv 4[7]$ ، $5^3\equiv 6[7]$ ،
$5^4\equiv 6[7]$ ، $5^5\equiv 3[7]$ ، $5^6\equiv 1[7]$ فالدور هو 6 .

ومنه : $5^{6k}\equiv 1[7]$ ، $5^{6k+1}\equiv 5[7]$ ، $5^{6k+2}\equiv 4[7]$ ،
$5^{6k+3}\equiv 6[7]$ ، $5^{6k+4}\equiv 2[7]$ ، $5^{6k+5}\equiv 3[7]$.

2) $5\times 2^{3k+1}-5^{6k+3}+3\equiv 5\times 2-6+3\equiv 0[7]$.

3) أ - $12^n+16^n-22^n\equiv 5^n+2^n-1\equiv 0[7]$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$5^n\equiv$	1	5	4	6	2	3	[7]
$2^n\equiv$	1	2	4	1	2	4	[7]
$5^n+2^n-1\equiv$	1	6	0	6	3	6	[7]

ومنه : $n=6k+2$ ($k\in\mathbb{N}$)

ب- $19^{6n+3}-23^{3n+1}+4n^2+3\equiv 5^{6n+3}-2^{3n+1}+4n^2+3$
$\equiv 6-2+4n^2+3\equiv 0[7]$

ومنه: $n^2\equiv 0[7]$ ومنه: $n\equiv 0[7]$ ومنه: $n=7k$ ($k\in\mathbb{N}$)

تمرين 27

1) إذا كان n عددا طبيعيا فادرس باقي قسمة 2^n ، 4^n على 7.

2) نضع : $a_n=2^n+4^n+8^n$.

أ- برهن انه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $a_{n+3}\equiv a_n[7]$.

ب - عين قيم n التي من أجلها يكون $a_n\equiv 0[7]$.

3) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $\begin{cases}2^n\times n+(n+1)\equiv 0[7]\\ 20\le n\le 80\end{cases}$

الحـــل

1) $2^0\equiv 1[7]$ ، $2^1\equiv 2[7]$ ، $2^2\equiv 4[7]$ ، $2^3\equiv 1[7]$ فالدور هو 3 ومنه : $2^{3k}\equiv 1[7]$ ، $2^{3k+1}\equiv 2[7]$ ، $2^{3k+2}\equiv 4[7]$

$4^0\equiv 1[7]$ ، $4^1\equiv 4[7]$ ، $4^2\equiv 2[7]$ ، $4^3\equiv 1[7]$ فالدور هو 3
ومنه : $4^{3k}\equiv 1[7]$ ، $4^{3k+1}\equiv 4[7]$ ، $4^{3k+2}\equiv 2[7]$.

$a_{n+3}\equiv 2^3\times 2^n+4^3\times 4^n+8^3\times 8^n\equiv 2^n+4^n+8^n\equiv a_n[7]$

ب- $a_n\equiv 0[7]$ ومنه :

$2^n+4^n+8^n\equiv 2^n+4^n+1\equiv 0[7]$

$n\equiv$	0	1	2	[3]
$2^n\equiv$	1	2	4	[7]
$4^n\equiv$	1	4	2	[7]
$2^n+4^n+1\equiv$	3	0	0	[7]

ومنه : $n=3k+1$ أو $n=3k+2$ ($k\in\mathbb{N}$)

3) $\begin{cases}2^n\times n+(n+1)\equiv 0[7]\\ 20\le n\le 80\end{cases}$

- إذا كان $n = 3k$ فإن

$$2^n \times n + (n+1) \equiv 1\times 3k + (3k+1) \equiv 6k+1 \equiv 0[7]$$

ومنه : $6k \equiv -1[7]$ ومنه: $k \equiv 1[7]$ يكافئ $k = 7h+1$

$(h\in\mathbb{N})$ ومنه $n = 3k = 3(7h+1) = 21h+3$

- إذا كان $n=3k+1$ فإن

$$2^n\times n+(n+1)\equiv 2\times(3k+1)+(3k+2)$$

$$\equiv 2k+4\equiv 0[7]$$

ومنه : $k\equiv -2\equiv 5[7]$ يكافئ $k=7h+5$ $(h\in\mathbb{N})$ ومنه

$n=3k+1=3(7h+5)+1=21h+16$.

- إذا كان $n=3k+2$ فإن

$$2^n\times n+(n+1)\equiv 4\times(3k+2)+(3k+3)$$

$$\equiv k+4\equiv 0[7]$$

ومنه: $k\equiv -4\equiv 3[7]$ يكافئ $k=7h+3$ $(h\in\mathbb{N})$

ومنه $n=3k+2=3(7h+3)+2=21h+11$ إذن حلول

المعادلة المعطاة هي: $n=21h+3$ و $n=21h+16$

و $n=21h+11$ حيث $h\in\mathbb{N}$

و $20\le n\le 80$ فتكون قيم العدد الطبيعي n المطلوبة هي :

$$n\in\{24;32;37;45;58;53;66;79\}$$

تمرين 28

1) عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 13^n على 5.

2) استنتج باقي القسمة الإقليدية لـ 13^a ، 13^b ، 13^d على5 حيث $a=2200$ ، $b=3500$ ، $d=PGCD(a;b)$.

3)عين العدد الطبيعي n الذي يحقق :

$$4^n\times(18)^{4n}+6^{2n}(n+1)\equiv 0[5]$$.

الحل

1) $13^0\equiv1[5]$ ، $13^1\equiv3[5]$ ، $13^2\equiv4[5]$ ، $13^3\equiv2[5]$ ،

$13^4\equiv1[5]$ فالدور هو 4. ومنه :

$13^{4k}\equiv1[5]$ ، $13^{4k+1}\equiv3[5]$ ، $13^{4k+2}\equiv4[5]$ ،

$13^{4k+3}\equiv2[5]$.

2) بما أن $2200=4\times550$ (شكل $4k$) فإن : $13^{2200}\equiv1[5]$ ،

و $3500=4\times875$ (شكل $4k$) فإن : $13^{3500}\equiv1[5]$ ،

و $PGCD(a;b)=100$ ، $13^{100}\equiv1[5]$.

$$4^n\times(18)^{4n}+6^{2n}(n+1)\equiv(-1)^n\times13^{4n}+36^n\times(n+1)$$

$$(-1)^n\times1+1\times(n+1)\equiv(-1)^n+(n+1)\equiv0[5]$$

- إذا كان n عددا زوجيا أي $n=2k$

فإن: $(-1)^n+(n+1)\equiv 2k+2\equiv0[5]$

ومنه : $k \equiv -1 \equiv 4[5]$ يكافئ $k = 5h + 4$ ومنه :

$n = 2k = 2(5h+4) = 10h + 8$ ($h \in \mathbb{N}$)

- إذا كان n عددا فرديا أي $n = 2k + 1$

فإن: $(-1)^n + (n+1) \equiv 2k + 1 \equiv 0[5]$

ومنه : $2k \equiv -1 \equiv 4[5]$ يكافئ $k \equiv 2[5]$

ومنه : $k = 5h + 2$

ومنه: $n = 2k + 1 = 2(5h+2) + 1 = 10h + 5$ ($h \in \mathbb{N}$)

مجموعة الأعداد الطبيعية n المطلوبة هي:

$n = 10h + 8$ و $n = 10h + 5$ حيث $h \in \mathbb{N}$.

تمرين 29

1) برهن أن العددين $(3n-2)$ و $(2n-1)$ أوليان فيما بينهما.

2) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق:

أ - $3n - 2 \equiv 0[7]$.

ب - $6n^2 - 7n + 2 \equiv 0[17]$

جـ - $\begin{cases} 3n - 2 \equiv 0[7] \\ 2n - 1 \equiv 0[3] \end{cases}$

د - $(3n-2)(2n-1) \equiv 0[n+1]$

الحـــل

1) بما أن $(-2)(3n-2) + 3(2n-1) = 1$ حسب مبرهنة بيزو

فالعددين $(3n-2)$ و $(2n-1)$ أوليان فيما بينهما.

2) أ - $3n - 2 \equiv 0[7]$ يكافئ $3n \equiv 2[7]$ يكافئ

$5 \times 3n \equiv 5 \times 2[7]$ يكافئ $n \equiv 3[7]$ يكافئ

$n = 7k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$).

ب- $6n^2 - 7n + 2 \equiv 0[17]$ يكافئ

$(3n-2)(2n-1) \equiv 0[17]$ ومنه

($3n - 2 \equiv 0[17]$ أو $2n - 1 \equiv 0[17]$) (لأن 17عدد أولي)

$3n - 2 \equiv 0[17]$ ومنه: $3n \equiv 2[17]$ ومنه:

$6 \times 3n \equiv 6 \times 2[17]$ ومنه: $n \equiv 12[17]$ ومنه:

$n = 17k + 12$ مع $k \in \mathbb{N}$.

$2n - 1 \equiv 0[17]$ ومنه: $2n \equiv 1[17]$ ومنه : $9 \times 2n \equiv 9[17]$

ومنه : $n \equiv 9[17]$ ومنه :

$n = 17k + 9$ مع $k \in \mathbb{N}$.

جـ - $\begin{cases} 3n - 2 \equiv 0[7] \\ 2n - 1 \equiv 0[3] \end{cases}$ ومنه : $\begin{cases} 9n - 6 \equiv 0[21] \\ 14n - 7 \equiv 0[21] \end{cases}$ ومنه :

$23n - 13 \equiv 0[21]$ ومنه : $2n \equiv 13[21]$ ومنه :

$11 \times 2n \equiv 11 \times 13[21]$ ومنه $n \equiv 17[21]$ ومنه:

$n = 21k + 17$ مع $k \in \mathbb{N}$.

د - $(3n-2)(2n-1) \equiv 0[n+1]$ يكافئ

$6n^2 - 7n + 2 \equiv 0[n+1]$ يكافئ

$(6n-13)(n+1)+15\equiv 0[n+1]$ ومنه: $15\equiv 0[n+1]$

يكافئ $(n+1)$ يقسم 15 يكافئ $(n+1)\in\{1;3;5;15\}$ ومنه:

$n\in\{0;2;4;14\}$

تمرين 30

1) ادرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الاقليدية لكل من العددين 5^n و 3^n على 11.

2) استنتج باقي قسمة 5^n-3^n على 11.

3)عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون 5^n-3^n+6 قابلا القسمة على 11.

الحـــــل

1) $5^0\equiv1[11]$ ، $5^1\equiv5[11]$،

$5^2\equiv3[11]$ ، $5^3\equiv4[11]$ ، $5^4\equiv9[11]$ ، $5^5\equiv1[11]$ ، فالدور هو 5 . ومنه :

$5^{5k}\equiv1[11]$ ، $5^{5k+1}\equiv5[11]$ ، $5^{5k+2}\equiv3[11]$ ،

$5^{5k+3}\equiv4[11]$ ، $5^{5k+4}\equiv9[11]$.

$3^0\equiv1[11]$ ، $3^1\equiv3[11]$ ، $3^2\equiv9[11]$ ، $3^3\equiv5[11]$ ،

$3^4\equiv4[11]$ ، $3^5\equiv1[11]$. فالدور هو 5 ومنه :

$3^{5k}\equiv1[11]$ ، $3^{5k+1}\equiv3[11]$ ، $3^{5k+2}\equiv9[11]$ ،

$3^{5k+3}\equiv5[11]$ ، $3^{5k+4}\equiv4[11]$.

(2

$n\equiv$	0	1	2	3	4	[5]
$5^n\equiv$	1	5	3	4	9	[11]
$3^n\equiv$	1	3	9	5	4	[11]
$5^n-3^n\equiv$	0	2	5	10	5	[11]

نستنتج من الجدول أن بواقي قسمة 5^n-3^n على 11 هي:

0 ، 2، 5، 10

3) من الجدول السابق نستنتج أن : $5^n-3^n+6\equiv0[11]$

إذا كان $n=5k+2$ أو مع $k\in\mathbb{N}$.



تمارين مقترحة للحل

تمرين 1

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

1) $n\left(n^6-1\right)\equiv 0[7]$

2) $4^n\left(3n-1\right)+1\equiv 0[6]$

3) $n^5-45n^3+4n\equiv 0[5]$

4) $3^{2n+2}-2^{n+1}$ يقبل القسمة على 7

6) $17^{4n+1}+3\times 9^{2n}\equiv 0[5]$

تمرين 2

1)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، باقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 5^n و 3^n على 7 .

2)استنتج باقي قسمة العدد 5^n-3^n+2 على7 .

3) عين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها 5^n-3^n+2 يقبل القسمة على 7 .

4) عين الثنائيات $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ حيث : $5^x-3^y\equiv 0[7]$

تمرين 3

1)أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي قسمة كل من العددين 5^n و 3^n على 7 .

2)استنتج بواقي قسمة العدد 3^n+5^n على7 .

3) عين مجموعة قيم n التي تحقق:

أ) $17^{6n+3}+26^{6n+2}-3n+13\equiv 0[7]$

ب) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$5\left(3^{6n+4}+6\times 5^{6n+2}\right)\equiv 0[7]$$

تمرين 4

1) أدرس بواقي القسمة الإقليدية لـ: 23^n و 26^n على 7 .

2) استنتج باقي قسمة $23^{2002}+26^{2002}$ على 7 .

3) استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي k فإن :

$$2^{12k+4}+5^{6k+2}+1\equiv 0[7]$$

4) برهن أن العدد $a=30^{30k+30}+\left(-9\right)^{30k+30}+5\times 27^{30k+30}$ يقبل القسمة على 7 .

تمرين 5

حل في $\mathbb{N}$ المعادلات الآتية :

1) $16^{n+3}+22^n-1\equiv 0[7]$

2) $2^{2n+1}+5^n\equiv 3[7]$

3) $2^n\times n+3n\equiv 3[7]$

4) $2^n-5^{6n+1}+n-1\equiv 0[7]$.

تمرين 6

1) أ – عين بواقي قسمة 5^1 ، 5^2 ، 5^3 ، 5^4 على 13 .

ب – استنتج قسمة 5^n على 13 .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن

$$31^{4n+1}+174^{8n+3}+39\equiv 0[13]$$

3) عين العدد الطبيعي n بحيث:

$$\begin{cases} 10 \le n \le 40 \\ 18^{4n+2} + 44^{4n+3} - 2n^2 \equiv 2[13] \end{cases}$$

تمرين 7

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعددين 10^n و 11^n على 7.

2) استنتج أن العدد $36\times 11^{3n+1} - 10^{6n+5} - 2$ هو من مضاعفات العدد 7 .

3) عين باقي قسمة العدد $a = 10^{2002} + 11^{2003} + 8^{2002}$ على 7.

4) عين الثنائيات $(x;y)$ من $\mathbb{N}^2$ حيث: $10^x - 11^y \equiv 1[7]$.

تمرين 8

1) أدرس بواقي قسمة العدد 3^n على 8.

2) عين العدد الطبيعي n في الحالتين التاليتين:

أ- $11^{2n} + 11^{6n+1} + 3n - 1 \equiv 0[8]$.

ب- $3^n \times n - 8n + 2 \equiv 0[8]$

تمرين 9

1) عين بواقي القسمة الإقليدية للعددين 4^n و 5^n على 7.

2) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $86 + 88^n + 89^n \equiv 0[7]$.

3) ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد $99^{2n} + 102^{3n} + 103^{6n}$ على7 .

تمرين 10

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن $n^2(n^2-1)$ يقبل القسمة على 12.

2) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n بحيث يكون العدد $n^2(n^2-1)$ قابلا القسمة على 60.

تمرين 11

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن العدد $a = 3\times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ يقبل القسمة على 17.

2) عين مجموعة الأعداد الطبيعية n لكي يكون العدد $b = a + 7n + 50$ قابلا القسمة على 17.

تمرين 12

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 7^n على 10.

2) ما هو باقي قسمة العدد $49^{2n+1} - 7^{8n+1} + 3$ على 10 .

3) عين في النظام العشري و حسب قيم n رقم الوحدات للعدد الطبيعي $a(n)$ المعرف بـ : $a(n) = 1 + 7 + 7^2 + ... + 7^n$

تمرين 13

عين مجموعة الأعداد الطبيعية n في الحالات التالية :

أ- $n^2 + 3n + 4$ يقبل القسمة على 7.

ب- $4n + 78 \equiv 0[n+1]$.

جـ - $(2n-1)(3n+5) \equiv 0[7]$.

تمرين 14

1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 5^n على 13 .

2)ما هو باقي قسمة العدد 2007^{2003} على 13 ؟

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $5\times12^{2n+1}+2\times5^{4n+1}+8$ قابلا القسمة على 13 .

4) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $2\times5^n+25^n\equiv9[13]$.

تمرين 15

1) أدرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة 3^nو 4^n على 7 .

2) برهن بأن العدد $73^{6n+4}+74^{3n+2}+8$ يقبل القسمة على 7 .

3) عين العدد الطبيعي n الذي يحقق :

$32^{1997}-38^{1998}+3n\equiv0[7]$.

تمرين 16

1) أدرس بواقي قسمة 3^n على 8.

2) عين العدد الطبيعي n في الحالات التالية :

أ- $19^{2n}+11^{2n+1}+n+2\equiv0[8]$.

ب - $3^n\times n-8n+2\equiv0[8]$.

جـ - $3^n-5^n+2\equiv0[8]$.

3) عين الثنائيات $(x;y)\in\mathbb{N}^2$ و التي تحقق :

$17^x-11^y\equiv2[8]$.

تمرين 17

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة بـ: $u_0=5$ ، $u_1=9$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1}=2u_n-u_{n-1}$

1) أثبت أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها .

2) أ – أكتب u_n بدلالة n .

ب – عين العداد الطبيعية n حتى يكون u_n مضاعفا للعدد 5.

3) أ – أدرس بواقي قسمة العدد 3^n على 5 .

ب – نضع $S_n=2^{u_0}+2^{u_1}+.......+2^{u_{n-1}}$

عين الأعداد الطبيعية n لكي يكون : $7S_n\equiv4[5]$.

تمرين 18

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 2^n على9 .

2) ما هو باقي قسمة كل من 2000^{2003} ، 1001^{2001} على 9 ؟

3) برهن أن العدد $902^{6n+1}+58^{3n+2}-2\times110^{6n+2}-1$ يقبل القسمة على 9 .

4) عين باقي قسمة العدد :

$2^{1997}+3^{1998}+4^{1999}+5^{2000}+6^{2001}+7^{2002}+8^{2003}$ على 9.

تمرين 19

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 و على 11 .

2) عين باقي قسمة العدد $2004^{2000}-2003^{2000}$ على 7 .

3) عين الأعداد الطبيعية التي تحقق $5^n\equiv4[77]$.

4) ما هو باقي قسمة العدد 5^{190} على 77 .

تمرين 20

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من الأعداد 2^n و 3^n و 5^n على 13 .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون

$$107^{3n+1} - 2\times 31^{4n+5} + 2^{12n+2} + 1830 \equiv 0[13]$$.

3) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة $3^x + 5^y \equiv 1[13]$.

4) يحتوي كيس على 7 كرات متجانسة لا نفرق بينها عند اللمس و مرقمة ، بحيث أرقام الكرات هي بواقي القسمة الإقليدية للعددين 3^n و 5^n على 13 ، نسحب من الكيس كرتين عشوائيا و في آن واحد ، ما احتمال سحب كرتين مجموع رقميهما عدد زوجي .

تمرين 21

1)أ- عين حسب قيمن العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 4^n على 7 .

ب – برهن أن من أجل كلّ عدد طبيعي n ، 7 يقسم العدد

$$16^{3n+1} - 3\times 1423^{2003} - 4\times 1424^{2004}$$

2) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة : $(x+1)\times 4^x + 3 \equiv 0[7]$.

3) يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 0 إلى 9 ، نسحب من الكيس 6 قريصات في آن واحد و ليكن f المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة أصغر رقم على القريصات المسحوبة .

أ – ما هي قيم المتغير العشوائي f ؟

ب – حدد قانون المتغير العشوائي f .

جـ - احسب احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي f قيمة من بواقي قسمة العدد 4^n على 7 .

تمرين 22

1)) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية لكل من العددين 2^n و 3^n و 5^n على 7 .

2) عين باقي قسمة العدد $18^{3n+5} - 9^{3n+7} + 6^{4n+1} + 2\times 2003^n$ على 7 .

3) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة $(n+1)\times 4^n + 3\times 9^{3n+1} \equiv 0[7]$.

4) عين باقي قسمة العدد :

$$2^{2002} + 3^{2003} + 4^{2004} + 5^{2005} + 6^{2006} + 7^{2007} + 8^{2008} + 9^{2009}$$

على 7 .

تمرين 23

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة العدد 7^n على 9 و على10.

2) حل في $\mathbb{N}$ المعادلة $49^{2n+1} + 7^{n+1} - 999^{2003} \equiv 7[10]$.

3) أ – عين العدد الطبيعي n لكي $7^n \equiv 7[90]$.

ب – عين باقي قسمة العدد 7^{50} على 90 .

جـ - عين رم آحاد العدد 7^{203} .

4) عين الثنائيات $(x;y) \in \mathbb{N}^2$ حيث: $\begin{cases} 2x + 2y \equiv 1[10] \\ 4x + y \equiv 7[10] \end{cases}$

تمرين 24

1) عين الثنائيات $(a;b)\in\mathbb{N}^2$ و التي تحقق : $a^2=b^2+7$.

2) أدرس بواقي قسمة كل من a^n و b^n على 7.

3) برهن أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن $a^{2n}-b^{2n}\equiv 0[7]$.

4) حل المعادلات التالية:

أ - $a^n-b^n\equiv 1[7]$.

ب - $a^n+3n\equiv 0[7]$.

تمرين 25

1)) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي قسمة كل من العددين 2^n و 10^n على 13، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

أ – من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $5\times 2^{12n+5}+2\times 10^{6n+4}+3$ يقبل القسمة على 13 .

ب - $8^{4n+1}+100^{3n+2}+2$ من مضاعفات العدد 13 .

2)حل في $\mathbb{N}$ المعادلات الآتية:

أ - $2^x-10^x\equiv 0[13]$.

ب- $4^{6x+1}-2x+1\equiv 0[13]$.





بالتوفيق إن شاء الله في البكالوريا

الأستاذ : محمد صابور

محتويات الكتيب

المحور الأول: القواسـم

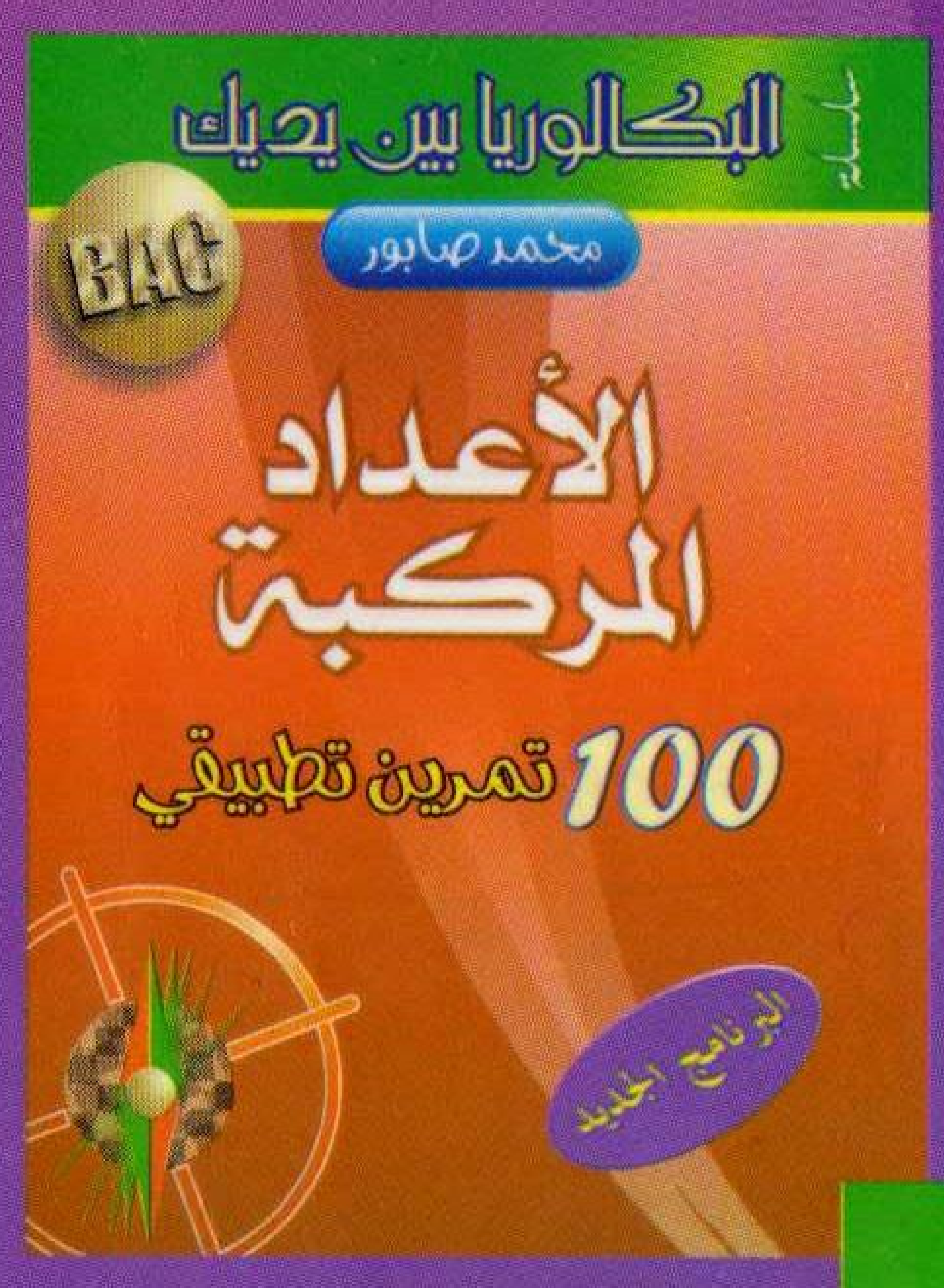
المحور الثاني: الموافقـات

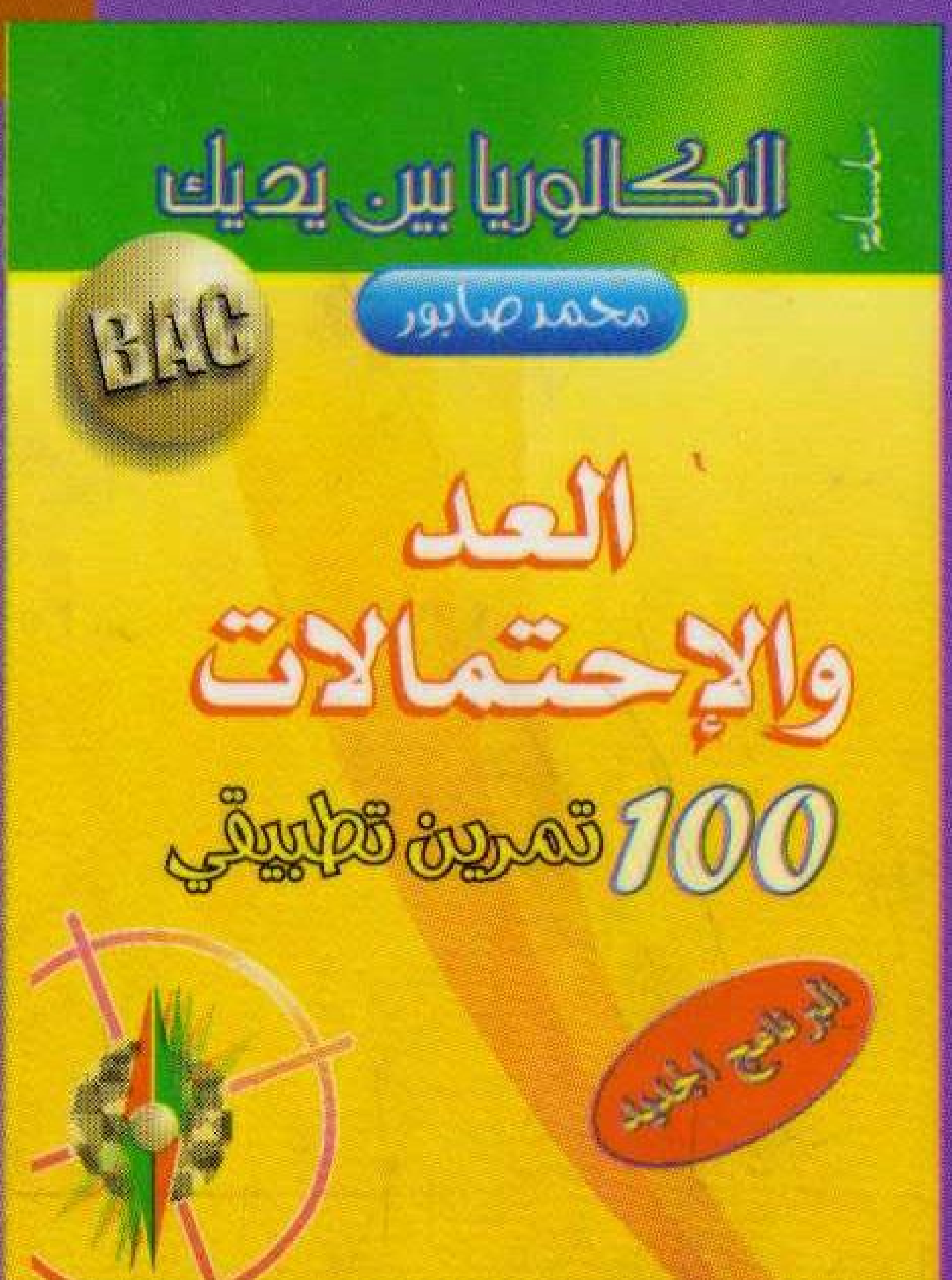
رب اشرح لي صدري و يسر لي أمري و احلل عقدة من لساني يفقهوا قولي

Scanned by: Mekk. Ayoub

Email: ayoubsoft2011@hotmail.fr

في نفس السلسلة





ISBN : 978-9947-0-2054-8